פתרונות לשאלות הפתוחות בתרגיל פתוח 7

סמסטר א', תשע"ה־תשע"ו

23 בדצמבר 2015

משפט 7.1 הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם ורק אם קיים $C > 0$ כך שלכל $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq 1$.
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq C$.

הוכחה:

($\underline{\Leftarrow:}$)נתון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = C_0 \in \mathbb{R}.$$

ניתן כעת להראות את חסימות הטור $\sum a_n b_n$ ע"י שימוש בתנאי 1 בלבד:

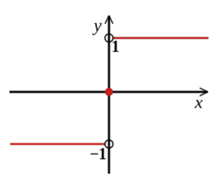
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = C_0.$$

($\underline{\Rightarrow:}$)נגדיר את הסדרה[1]

$$b_n = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_n) & n \leq N_0 \\ 0 & n > N_0 \end{cases}$$

---

[1] היכן ש $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ וכנובע $|\operatorname{sgn}(x)| = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. באופן גרפי, אתם יכולים לדמיין את $\operatorname{sgn}(x)$ בצורה הבאה:



<u>הערה לסטודנטים חרוצים, שקדנים ומתקדמים:</u> פונקציות מסוג זה, שנקראות פונקציות מדרגה, מהוות כר פורה לדוגמאות נגדיות רבות. דוגמה מעניינית נוספת לפונקצית מדרגה היא Haar Function שמוגדרות כבתור

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -1 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ובדומה ניתן להכליל <u>למערכת של פונקציות</u> $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמקבלות את הערכים הקבועים ± 1 לסירוגין על קטעים דיאדיים, כלומר קטעים מהצורה $\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$ עבור $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ואמנם בסימונים הללו

$$|b_n| = \begin{cases} |\mathrm{sgn}(a_n)| & n \le N_0 \\ 0 & n > N_0 \end{cases}.$$

הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את שני התנאים מעלה:

1. היא חסומה ע"י 1.
2. החל ממקום מסוים היא אפסה זהותית ולכן לפי הגדרת הגבול 0 $\lim_{n\to\infty} |b_n| = 0$.

לפיכך יתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \le C_1 \tag{1}$$

נניח בשלילה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ לא מתכנס. נסמן את סדרת הסכומים החלקיים שלו כבתור

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} |a_n|.$$

מאחר שמדובר בטור חיובי אז

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty \Rightarrow S_N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

מכך נסיק שקיים $N_0 \in \mathbb{N}$ שעבורו

$$\sum_{n=1}^{N_0} |a_n| > C_1.$$

מאידך גיסא, מאחר ש$|a_n| = a_n \cdot \mathrm{sgn}\,(a_n)$ ניתן להגדיר את הסדרה,

$$a_n b_n = \begin{cases} |a_n| & n \le N_0 \\ 0 & n > N_0 \end{cases}$$

אולם

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N_0} |a_n| > C_1 \tag{2}$$

אבל זו סתירה למסקנה (1). מהסתירה נסיק כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס ומכאן ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

■

טענה 7.2 הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+x)^{n+y}(n+y)^{n+x}}$ מתכנס עבור $\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$.

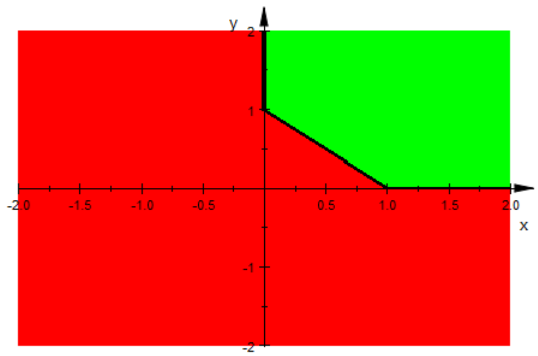
הוכחה: נפשט תחילה את האיבר בטור

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^{2n}}{(n+x)^{n+y}(n+y)^{n+x}} \\ &= \left(\frac{n^n}{(n+x)^n}\right) \cdot \left(\frac{n^n}{(n+y)^n}\right) \cdot \frac{1}{(n+x)^y\,(n+y)^x} \\ &= \frac{1}{(n+x)^y(1+\frac{x}{n})^n(n+y)^x(1+\frac{y}{n})^n} \end{aligned}$$

נשווה בצורה גבולית עם הטור $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{x+y}}$. שני הטורים הם טורים חיוביים והמנה ביניהם שואפת לקבוע:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+x)^y(1+\frac{x}{n})^n(n+y)^x(1+\frac{y}{n})^n}}{\frac{1}{n^{x+y}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^x\cdot n^y}{(n+x)^y(n+y)^x}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n\cdot(1+\frac{y}{n})^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+x}\right)^y\left(\frac{n}{n+y}\right)^x\cdot e^{-x}\cdot e^{-y}\\ &= 1\cdot 1\cdot e^{-(x+y)}\end{aligned}$$

לכן הם מתכנסים יחדיו. הטור שלנו מתכנס אמ"מ $\sum \frac{1}{n^{x+y}} < \infty$, כלומר אמ"מ $x+y>1$. אם נשרטט תחום זה:



■