תרגיל כיתה 11 – משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים

מתרגל: אדם צ'פמן

משוואות הומוגניות:

משוואה מסדר שני עם משתנים קבועים הומוגנית היא משוואה מהצורה

$y''+ay'+by=0$.

איך פותרים?

פותרים את המשוואה הריבועית $t^2+at+b=0$. אם מקבלים שני פיתרונות ממשיים λ_1 ו λ_2 שונים אז הפיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית הם $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$.

אם יש פיתרון אחד λ אז $y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$.

דוגמאות:

- $y''-5y'+4y=0$.

למשוואה $t^2-5t+4=0$ ישנם שני פיתרונו, $\lambda_1=1$ ו $\lambda_2=4$. משמע, הפיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית הם $y=c_1e^{x}+c_2e^{4x}$.

- $y''-2y'+y=0$

למשוואה $t^2-2t+1=0$ יש פיתרון אחד $\lambda=1$, ולכן הפיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית הם $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$.

אם למשוואה $t^2+at+b=0$ ישנם שני פתרונות מרוכבים אז הם בהכרח צמודים, כלומר אחד $a+bi$ והשני $a-bi$. במקרה זה הפיתרונות למשוואה $y''+ay'+by=0$ הם $y=c_1e^{ax}\cos(bx)+c_2e^{ax}\sin(bx)$.

דוגמא

- $y''-4y'+13y=0$.

הפיתרונות למשוואה $t^2-4t+13=0$ הם $2+3i$ ו $2-3i$, ולכן הפיתרונות למשוואה הדיפרנציאלית הם $y=c_1e^{2x}\cos(3x)+c_2e^{2x}\sin(3x)$.

תנאי התחלה:

למערכת
$$\begin{cases} y''+ay'+by=0 \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=v_0 \end{cases}$$
יש תמיד פיתרון יחיד.

דוגמא

- $y''=-4y$ כאשר $y(0)=1$ ו $y'(0)=0$.

נעביר את המשוואה לצורה מוכרת $y''+4y=0$. למשוואה $t^2+4=0$ ישנם שני פיתרונות מרוכבים $2i$ ו $-2i$. הפיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית (בלי להתייחס כרגע לשאר המערכת) הם $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$. נציב במשוואה את $y(0)=1$ ו $y'(0)=0$ ונקבל $\begin{cases} 1=c_1 \\ 0=2c_2 \end{cases}$, משמע הפיתרון (היחיד) למערכת הוא $y=\cos(2x)$.