

## תרגיל בית 6 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשפ"ב

**שאלה 1** (חימום). תהי  $L/F$  הרחבת שדות ספרבילית, ויהי  $K$  שדה ביניים. הוכיחו כי גם  $K/F$  וגם  $L/K$  ספרביליות.

**שאלה 2.** קבעו האם הפולינומים הבאים ספרביליים.

א.  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  מעל  $\mathbb{Q}$ .

ב.  $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$  מעל  $\mathbb{Q}$ .

ג.  $x^{10} + x^5 + 3$  מעל  $\mathbb{F}_5$ .

ד.  $x^p - x + a$  מעל שדה  $F$  ממאפיין  $p > 0$  (שפגשנו כבר בכיתה).

**שאלה 3.** יהיו  $F, K$  שדות, יהי  $\varphi : F \hookrightarrow K$  שיכון, ויהי  $f \in F[x]$ . הוכיחו:

א.  $\varphi(f') = (\varphi(f))'$ .

ב.  $f$  ספרבילי מעל  $F$  אם ורק אם  $\varphi(f)$  ספרבילי מעל  $K$ .  
(הדרכה: היעזרו בקריטריון לבדיקת ספרביליות על ידי הנגזרת.)

**שאלה 4.**

א. מצאו את כל ההמשכות של  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$  לשיכון  $\text{id} : \mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$  ושיכון  $\psi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ .

ב. בחרו את אחד השיכונים שמצאתם בסעיף א', ומצאו את כל ההמשכות שלו לשיכון  $\hat{\psi} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ .

**שאלה 5.** תהי  $L/F$  הרחבת שדות סופית (כלומר ממימד סופי), ויהי  $K$  שדה ביניים. נניח שהרחבות  $L/K$  ו- $K/F$  ספרביליות. הוכיחו ש- $L/F$  ספרבילית.  
(הדרכה: בכמה דרכים ניתן להמשיך את  $\text{id} : F \hookrightarrow \overline{F}$  ל- $L \hookrightarrow \overline{F}$ ?)

**שאלה 6** (רשות). יהי  $f = x^5 + x^3 + x + 1 \in F[x]$ . הוכיחו כי  $f$  ספרבילי אם ורק אם  $\text{char } F \neq 11, 37$ .