פונקציות מרוכבות
תרגיל בית מסי 9 - פתרון

1. מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולאריות של הפונקציות הבאות:

1.1. $\frac{1-\cosh z}{z^3}$

1.2. $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$

1.3. $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

1.4. $e^{\frac{1}{z}}$

1.5. $\frac{1}{\sin z}+\frac{\pi^2}{z(4z-\pi^2)}+\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$

<u>פתרון</u>:

1.1. $\frac{1-\cosh z}{z^3}$ אינה מוגדרת ב-0 (המכנה מתאפס שם) והמונה הוא פונקציה שלמה. לכן הנקודה הסינגולארית היחידה היא $z_0=0$. מתקיים:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cosh(z)}{z^3}\underset{l'Hopital}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{z\to 0}\frac{-\sinh(z)}{3z^2}\underset{l'Hopital}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{z\to 0}\frac{-\cosh(z)}{6z}=\infty$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cosh(z)}{z^2}\underset{l'Hopital}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{z\to 0}\frac{-\sinh(z)}{2z}\underset{l'Hopital}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{z\to 0}\frac{-\cosh(z)}{2}=-\frac{1}{2}$$

כלומר זהו קוטב פשוט (מסדר ראשון).

1.2. $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ אינה מוגדרת ב-0 (המכנה מתאפס שם) והמונה הוא פונקציה שלמה. לכן הנקודה הסינגולארית היחידה היא $z_0=0$. מתקיים:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{2z}}{z^4}\underset{l'Hopital}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{z\to 0}\frac{-2e^{z}}{4z^3}="\frac{-3}{0}"=\infty$$

מכאן זהו קוטב. השתמשנו פעם אחת בלופיטל וזה מצביע על כך שלמונה יש אפס מריבוי אחד ולמכנה יש אפס מריבוי 4. לכן, כפי שלמדנו, סדר הקוטב הוא 4-1=3.

1.3. $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ אינה מוגדרת ב-1 (המכנה מתאפס שם). למונה אפס מריבוי 0 (אינו מתאפס) והוא פונקציה שלמה. למכנה אפס מריבוי 2 ולכן יש קוטב מסדר 2 בנקודה $z=1$. אין נקודות סינגולאריות נוספות.

1.4. יש נקודה סינגולארית אחד ב- 0 מסוג סינגולאריות עיקרית.

1.5 $f(z)$ מורכבת משלושה מחוברים, לכן נקודה סינגולארית של אחד המחוברים תיתן נקודה סינגולארית של $f(z)$ כאשר נסכם בסוף את הנתונים על כל נקודה. נבחן כל מחובר בנפרד:

א. $\frac{1}{\sin z}$: נבדוק את האפסים של $\sin z$: $\sin z = 0$ כאשר $z = \pi k$ כש $k \in \mathbb{Z}$.

$(\sin z)' = \cos z$ ו $\cos(z = \pi k) \neq 0$ לכל $k \in \mathbb{Z}$.

לכן נסיק של $\sin z$ אפס פשוט בנקודות $z = \pi k$ כש $k \in \mathbb{Z}$, ולכן ל $\frac{1}{\sin z}$ קטבים פשוטים באותן נקודות.

ב. $\frac{\pi^2}{z\left(4z^2 - \pi^2\right)}$: נחפש אפסים של המכנה: $z\left(4z^2 - \pi^2\right) = z(2z - \pi)(2z + \pi)$. האפסים מתקביל כאשר $z = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$. נבדוק את נגזרת המכנה: $\left[z\left(4z^2 - \pi^2\right)\right]' = 12z^2 - \pi^2$. נגזרת המכנה לא מתאפסת באף נקודה סינגולרית שמצאנו, כלומר שלושת הנקודות $z = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ הן אפסים פשוטים של $z\left(4z^2 - \pi^2\right)$ ולכן הם קטבים פשוטים של $\frac{\pi^2}{z\left(4z^2 - \pi^2\right)}$.

ג. $\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$: ראשית, ניתן להבחין שיש נקודה סינגולרית ב $z = 0$. מכיוון שהגבול $\lim_{z \to 0} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ לא קיים, גם $\lim_{z \to 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$, ולכן $z = 0$ נקודה סינגלרית עיקרית.

שנית, נבדוק היכן המכנה מתאפס: $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ כאשר $\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, או $z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$

נגזור את המכנה: $\left[\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right]' = \frac{1}{z^2}\sin\left(\frac{1}{z}\right)$. נגזרת המכנה לא מתאפסת ב $z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}$

לכן נסיק שלביטוי $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ אפסים פשוטים ב $z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

ולכן ל $\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$ קטבים פשוטים באותן נקודות.

כעת ניתן לראות שקיימת סדרה של נקודות סינגולריות: $z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, ולכן ב $z = 0$ יש נקודת סינגולריות לא מבודדת.

סיכום:

- בנקודות $z = \pi k$, כש $0 \neq k \in \mathbb{Z}$, נקודות סינגולריות מסוג קוטב פשוט.
- בנקודות $z = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ יש נקודות סינגולריות מסוג קוטב פשוט.
- בנקודות $z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$ יש נקודות סינגולריות מסוג קוטב פשוט.
- בנקודה $z = 0$ יש נקודה סינגולרית לא מבודדת.

2. מצאו פיתוחי לורן בכל התחומים האפשריים לפונקציה $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-i)}$ סביב $z_0=i$.

<u>**פתרון**</u>:

פירוק לשברים חלקיים :

$$\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z-i}$$
$$1=Az(z-i)+B(z-i)+Cz^2$$
$$1=(A+C)z^2+(-iA+B)z-iB$$

$$\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{z}+\frac{i}{z^2}+\frac{-1}{z-i} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}A=1\\B=i\\C=-1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}A+C=0\\-iA+B=0\\-iB=1\end{cases}$$

$$0<|z-i|<1\Rightarrow f(z)=-\frac{1}{z-1}-2i+3(z-i)-4i(z-i)^2+5(z-i)^3-\dots$$

$$|z-i|>1\Rightarrow f(z)=\dots+\frac{4i}{(z-i)^6}-\frac{3}{(z-i)^5}-\frac{2i}{(z-i)^4}+\frac{1}{(z-i)^3}$$

<u>קיימת דרך נוספת</u> : להתבונן בפונקציה המקורית כי $\dfrac{1}{z^2(z-i)}=\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{z-i}$ ולפתח $\dfrac{1}{z}=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-i)^n$ בשני תחומים, אחר כך לקבל פיתוח $\dfrac{1}{z^2}=-\left(\dfrac{1}{z}\right)'$ ובסופו של דבר להכפיל. ב- $\dfrac{1}{z-i}$

3. נמקו מדוע הטיעון הבא אינו נכון : ידוע כי $\dfrac{z}{z-1}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^3}+\dots$ וכן כי $\dfrac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+z^4+\dots$.

מכיוון ש- $\dfrac{z}{1-z}+\dfrac{z}{z-1}=0$, מתקיים $\dots+\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+z^4+\dots=0$

<u>**פתרון**</u>:

הסדרה הראשונה מתכנסת עבור $|z|>1$ והשנייה עבור $|z|<1$. לפיכך אין ערך מרוכב עבורו שתי הסדרות מתכנסות בעת ובעונה אחת.

4. חשבו את החלק העיקרי של טור לורן לפונקציה $f(z)=\dfrac{e^z\cos z}{z^3}$ סביב $z_0=0$.

<u>**פתרון**</u>:

$$\frac{e^z\cos z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\dots\right)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right)=$$
$$=\frac{1}{z^3}\left(1+z+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!}\right)z^2+\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)z^3+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{4!}\right)z^4\dots\right)=$$
$$\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}z+\dots$$

החלק העיקרי הוא $\underline{\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}}$

.5 חשבו את האינטגרלים $\oint\limits_{|z|=3} f(z)dz$, $\oint\limits_{|2z+1|=6} f(z)dz$ עבור פונקציות הבאות בהסתמך על תכונותיו של מקדם לורן c_{-1} שלהן:

.5.1 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)}$

.5.2 $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z+1)}$

.5.3 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}$

.5.4 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^2}$

.5.5 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$

.5.6 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)(z+4)}$

<u>**פתרון**</u>:

יש לפתח טורי לורן בתחומים המכילים את המסלולים הסגורים $C_1=\{z:|z|=3\}$, $C_2=\{z:|z+1|=3\}$.

.5.1

$$C_1=\{z:|z|=3\}\subset\{z:|z|>2\}$$

$$|z|>2:\ f(z)=\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+2/z}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-2/z\right)}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z^3}+\dots$$

$$\Rightarrow\quad c_{-1}=0\quad\Rightarrow\oint\limits_{|z|=3} f(z)dz=2\pi i c_{-1}=0$$

$$C_2=\{z:|z+1|=3\}\subset\{z:|z|>2\}$$

לכן פיתוח לורן הקודם מתאים גם כאן! לפיכך

$$\oint\limits_{|2z+1|=6} f(z)dz=\oint\limits_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=3} f(z)dz=2\pi i c_{-1}=0.$$

.5.2

$$C_1=\{z:|z|=3\}\subset\{z:|z|>1\}$$

$$f(z)=\frac{z+2}{z(z+1)}=\left[1+\frac{2}{z}\right]\frac{1}{z+1}=\left[1+\frac{2}{z}\right]\cdot\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-1/z\right)}\right]=\left[\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1/z\right)^n=$$

$$=\left[\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}\right]\left(1-\frac{1}{z}+\dots\right)=\frac{1}{z}+\dots$$

$$c_{-1}=1\Rightarrow\oint\limits_{|z|=3} f(z)dz=2\pi i$$

$$C_2=\{z:|z+1|=3\}\subset\{z:|z|>1\}$$

ושוב פיתוח לורן הקודם מתאים, לכן $\oint\limits_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=3} f(z)dz=2\pi i$

.5.3

$$C_1, C_2 \subset \{z : |z| > 1\}$$

$$|z| > 1:\ f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z+1}\right) = \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}\right) = \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^{-(n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d}{dz}(-z)^{-(n+1)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(-z)^{-(n+2)}\right] = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \dots$$

$$c_{-1} = 0 \quad \Rightarrow \oint_{|z|=3} f(z)dz = \oint_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=3} f(z)dz = 0$$

.5.4

$$C_1, C_2 \subset \{z : |z| > 1\}$$

$$|z| > 1:\quad f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \dots\right] = \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \dots$$

$$c_{-1} = 0 \quad \Rightarrow \oint_{|z|=3} f(z)dz = \oint_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=3} f(z)dz = 0$$

.5.5

$$C_1, C_2 \subset \{z : |z| > 2\}$$

$$|z| > 2:\ f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{\frac{1}{z}(z+1)(z+2)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)(z+2)} =$$

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\left[1-\frac{1}{z}+\dots\right]\cdot\left[1-\frac{2}{z}+\dots\right] = \frac{1}{z}\left[1-\frac{3}{z}+\dots\right] = \frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \dots$$

$$c_{-1} = 1 \quad \Rightarrow \oint_{|z|=3} f(z)dz = \oint_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=3} f(z)dz = 2\pi i$$

.5.6

$$C_1 \subset \{z : 1 < |z| < 4\}$$

$$1 < |z| < 4:\ f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+4)} = \frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4z^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \dots\right]\cdot\left[1 - \frac{z}{4^1} + \frac{z^2}{4^2} - \frac{z^3}{4^3} + \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\dots + \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} - \dots\right]\frac{1}{z} + \dots\right\} = \frac{1}{4}\left\{\dots + \left[-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\frac{1}{z} + \dots\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\dots + \left[-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\frac{1}{z} + \dots\right\} = \left\{\dots + \left[-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right]\frac{1}{z} + \dots\right\} = \left\{\dots + \left[-\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{3}\right]\frac{1}{z} + \dots\right\}$$

$$.\ c_{-1} = -\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \oint_{|z|=3} f(z)dz = -\frac{1}{12}\cdot 2\pi i = -\frac{\pi i}{6} = \oint_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=3} f(z)dz$$