

קובץ שינויים עבור תרגול 13 :

4 א. הסדרה המוגדרת ע"י  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$  לכל  $n \geq 2$ , צ"ל שהסדרה מונוטונית עולה. פתרון: נראה שהסדרה מונוטונית עולה, נוכיח באינדוקציה על  $n$  כי  $a_{n-1} < a_n$  לכל  $n \geq 2$ : עבור:  $n = 2$ , ראשית:  $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$ , לכן:  $a_1 < a_2$ . עכשיו נניח  $a_{n-1} < a_n$  (הנחת האינדוקציה) ונוכיח כי  $a_n < a_{n+1}$

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$$

השתמשנו בהנחת האינדוקציה  $a_{n-1} < a_n$  בכדי להסיק ש-  $\sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}}$ . קיבלנו אם כן שהסדרה  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  מונוטונית עולה.

עוד סעיף של סדרה מונוטונית וחסומה שעושים אחרי שמסיימים את 4 א':

דוגמא : תהיי הסדרה  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  המוגדרת ע"י כל הנסיגה:  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right)$ ,  $a_1 = 2$  הוכח כי הסדרה  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  מתכנסת ומצא את גבולה. פתרון: נראה כי הסדרה  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  חסומה ומונוטונית יורדת ולכן מתכנסת. בשביל החסימות נשתמש בעובדה כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים תמיד גדול או שווה לממוצע ההנדסי שלהם ולכן:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{3}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{3}{a_n}} = \sqrt{3}$$

קיבלנו לכן כי  $a_n \geq \sqrt{3}$  לכל  $n$  ולכן הסדרה  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  חסומה מלמטה ע"י  $\sqrt{3}$ . נראה עכשיו כי היא מונוטונית יורדת:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right) < \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) < \frac{1}{2} \left( a_n + \sqrt{3} \right) < \frac{1}{2} (a_n + a_n) = a_n$$

קיבלנו כי  $a_{n+1} < a_n$  ולכן הסדרה  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  מונוטונית יורדת, היא גם חסומה ולכן מתכנסת. נעבור לחישוב הגבול שלה. נקרא לגבול  $L$ :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( L + \frac{3}{L} \right)$$

קיבלנו  $L = \frac{1}{2} \left( L + \frac{3}{L} \right)$  נפתור משוואה זו ונקבל תשובה סופית ש:  $L = \sqrt{3}$