השונות בהתפלגות גאומטרית

טענה:

$$V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

הוכחה:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$(E[X])^2 = \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X]$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\cdot q^{k-1}\cdot p =$$

$$= pq\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)'' =$$

$$= pq\left(\frac{1}{1-q}\right)' = pq\cdot\frac{2}{(1-q)^3} = \boxed{\frac{2q}{p^2}}$$

ולהציב

$$V[X] = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

הערה: להתפלגות הגאומטרית יש תכונה הנקראת "חוסר זיכרון" כלומר: לכל $s,t \geq 0$

$$P(X=s+t \mid X=t) = P(X=s)$$

ההס' להצלחה לאחר שעברנו t נסיונות ונדרשה משך הצלחה ב s נס' נוספים לא השתנתה!

3

$X \sim Pois(\lambda)$ התפלגות פואסון

(ע"ש סימאון דני פואסון)

- X מספר אירועים "נדירים" המתרחשים בפרק זמן קבוע.

- האירועים מתרחשים באופן בלתי תלוי ובקצב (ממוצע) קבוע.

λ ← מס' המאורעות/התופעות המתרחשים בפרק זמן מסוים כאשר הסכ' להתרחשות התופעה בפרק זמן קצר קבועה.

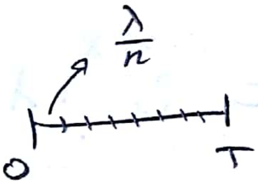
לדוגמא - מספר הברקים בפרק זמן...

- מספר שיחות הטלפון במרכז תמיכה טלפוני בדקה.

- פירוק אטומים ← מס' האטומים המתפרקים בפרק זמן נתון בחומר ר"א.

$k=0,1,2,...$

$$\boxed{P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}}$$



את ההתפ' הזו ניתן להראות דרך הבינומי - כגבול של סדרת התפ' בינומית כאשר $n\to\infty$ מס' הניסויים והתוחלת נשארת קבועה.

$X \sim Bin\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$ וכאשר $n\to\infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

הערה:

טענה:

$$E[X]=\lambda$$

הוכחה:

$$E[X]=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

השונות בפואסוני

$$V[X]=\lambda$$

הוכחה:

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$$

$$E[X^2]=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k}}{(k-1)!}=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k}}{(k-1)!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\lambda^{k+1}}{k!}=$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}\right)=$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\left(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda}\right)=\underline{\lambda^2+\lambda}$$

ובסה״כ

$$E[X^2]-(E[X])^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

ידוע שמספר הרכבים הנכנסים לצומת מתפלג פואסון עם $\lambda = 5$ לדקה. מה ההסתברות ש-:

1) בין 10:00 ל- 10:01 לא ייכנס אף רכב?

2) בדקה מסויימת ייכנסו לפחות 3 רכבים?

3) בין 11:00 ל- 11:05 ייכנסו 20 רכבים?

4) בהינתן שבמשך חצי דקה נכנסו 4 רכבים, מה ההסתברות שבמהלך כל אותה הדקה הבאה ייכנסו 6 רכבים סה"כ?

<u>פתרון:</u>

פונ' ההסתברות של התפלגות פואסון: $\left(\lambda > 0,\ k \in \{0,1,2,...\}\right)$ $\quad P(X=k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$X \sim Poi(5)$ – מס' הרכבים (נשים לב שהיחידות נמדדות בדקה).

א) $P(X=0) = \dfrac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5} = 0.0067$

ב)
$$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2)$$
$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right]$$
$$= 1 - \left[e^{-5} + \frac{5e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!}\right] = 1 - e^{-5}\left[1 + 5 + \frac{5^2}{2}\right] = 0.875$$

ג) נעזר בעובדה הבאה לגבי התפלגות פואסון $X \sim Poi(\lambda) \Rightarrow tX \sim Poi(\lambda t)$

ולכן עבור יחידת זמן של 5 דקות $X \sim Poi(5 \cdot 5)$

(כלומר 5 פניות בדקה <= 25 פניות ב-5 דקות)

מכאן $P(5X = 20) = \dfrac{25^{20} e^{-25}}{20!} = 0.052$

לעשות מיון לפי נושא

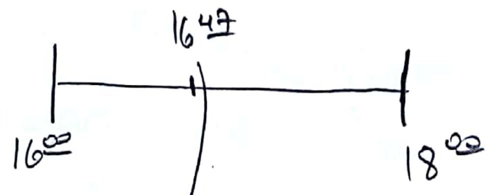
מבוא להסתברות וסטטיסטיקה- הרצאה 8

משתנה מקרי רציף

דוגמאות:

X - זמן הגעת אוטובוס לתחנה בין 16^{00}-18^{00}

Y - גובהו של אדם.



$P(X=16^{47})=0$ → מאורע והטווח רציף

הגדרה: נאמר שמשתנה מקרי X הוא רציף (צריך לומר רציף בהחלט)

אם קיימת פונקציה $f_X(x)$ כך ש:

$$\boxed{P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)\,dx}$$

(הסתברות "ליפול" בקטע)

f_X נקראת פונק' הצפיפות של X.

הערה: אם X רציף $P(X=a)=0$

(שכן באינטגרל $\int_a^a f_X(x)dx=0$)

מההערה ניתן לראות כי הקצוות a,b לא רלוונטיים להסת'.

תכונות של פונ' הצפיפות f_X

1. $f_X(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

שכן מדובר ב: $P(\underbrace{-\infty<X<\infty}_{\Omega})$

3. פונ' צפיפות נקבעת ביחידות (ז"א יחידה) עד כדי מספר סופי או מספר בר-מניה של נקודות
(שכן שינוי בפונ' במספר סופי או בן מניה לא ישפיע על האינטגרל)

פונ' ההתפלגות של מ"מ X (פונ' התפלגות מצטברת)

$$\boxed{F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx}$$

תכונה

$$\int_a^b f_X(x)dx = P(a<X\leq b) = P(X\leq b) - P(X\leq a)$$

$$= F_X(b) - F_X(a)$$

① ②

תוחלת של מ"מ רציף X

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,dx$$

השונות

נשארת כמו בבדיד.

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$$

תרגיל

פונ' הצפיפות של מ"מ X היא $f_X(x)=\begin{cases} cx^n, & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

א. חשב את c.

ב. מצא את פונ' ההתפלגות של X $F_X(t)$.

ג. חשב $P(X\ge a)$ לכל $0\le a\le 1$.

פתרון: א. מתכונה (2) של פונ' הצפיפות ידוע כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$$

$$1=\int_0^1 c x^n dx=\frac{c x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{c}{n+1}$$ ולכן

$$\Rightarrow \boxed{c=n+1}$$

ב.

$$F_X(t)=P(X\le t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx=$$

$$=\int_0^t (n+1)x^n\,dx = x^{n+1}\Big|_0^t = t^{n+1}$$

גם הסתברות משלימה לסעיף ב'

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) =$$
$$= 1 - F_X(a) = \underline{1 - a^{n+1}}$$