

תרגיל 10 אנליזה הרמונית תשע"ט

31 בדצמבר 2018

להגשה בשבוע שמתחיל בז' שבט 13.01.

1. מצאו את טור פורייה המרוכב בקטע $[-\pi, \pi]$ של הפונקציה:

$$f_{q,h}(x) = \begin{cases} 1 & q-h < x < q+h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר q, h הם קבועים המקיימים: $0 < h$, $q \in (-\pi, \pi)$, ובנוסף $|q| + h < \pi$ (כדי שהפונקציה תהיה שווה ל-1 בתת-קטע של $[-\pi, \pi]$).

באמצעות פרסבל מוכלל על הפונקציות $f_{0,h}, f_{q,h}$, הוכיחו שמתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 hn \cos qn}{n^2} = \frac{\pi}{4} \max\{2h - |q|, 0\} - \frac{h^2}{2}$$

שוויון פרסבל מוכלל מופיע בתחילת תרגול 5 במערכים של הטכניון.

2. נתבונן בפונקציה $f(x) = \sin x$ בקטע $[0, \pi]$.

(א) חשבו את טור הסינוסים ואת טור הקוסינוסים של f בקטע.

(ב) נסמן ב- $S(x)$ את טור הקוסינוסים שחושב בסעיף הקודם. טור הקוסינוסים הוא טור פורייה של המשכה הזוגית של f לקטע $[-\pi, \pi]$. חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S^2(x) dx, \int_{\pi}^{9\pi} S^2(x) dx$$

טורי סינוסים וקוסינוסים מופיעים בתחילת תרגול 7 של הטכניון.

3. מצאו את התמרת פורייה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

4. (א) מצאו את התמרת פורייה של הפונקציות הבאות:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(ב) נתבונן בפונקציה:

$$g(x) = \begin{cases} ax + b & d - c < x < d + c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר a, b, c, d קבועים, $0 < c$. הראו שאפשר לרשום:

$$g(x) = (ad + b) f_1\left(\frac{x-d}{c}\right) + ac f_2\left(\frac{x-d}{c}\right)$$

(ג) חשבו את התמרת פורייה של g באמצעות הסעיף הקודם.

(ד) באמצעות הסעיף הקודם, חשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$h(x) = \begin{cases} C + x & -C < x < -D \\ C - D & -D < x < D \\ c - x & D < x < C \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$