

קורס: 88-133-01,05,07
 מרצים: ד"ר א. שיינר, ד"ר מ. שיין, ד"ר ש. הורוביץ
 כ"א תמוז תשע"א

פתרון מבחן בחשבון אינפיניטסמלי 2 מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. כל שאלה שווה 18 נקודות. חומר עזר אסור. אתם חייבים
לנמק כל תשובה. משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. חשבו: א. $\int x^3 \arctan x \, dx$

$$\int x^3 \arctan(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f' = x^3, g = \arctan \\ f = \frac{x^4}{4}, g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} = \frac{1}{4} x^4 \arctan(x) - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \frac{1}{4} x^4 \arctan(x) -$$

$$-\frac{1}{4} \int \left[(x^2-1) + \frac{1}{1+x^2} \right] dx = \frac{1}{4} x^4 \arctan(x) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} x^3 - x + \arctan(x) \right) + C$$

ב. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2-\cos^2 x}} dx$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2-\cos^2 x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x) dx \end{array} \right\} = -\int \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt = -\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{t}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{1}{\sqrt{2}} dt \end{array} \right\} = -\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin(u) = -\arcsin\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right) + C$$

2. א. קבעו אם האינטגרל מתכנס או מתבדר: $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^3 + \sqrt{x}} dx$

ראשית נשים לב כי אפס נקודה חשודה. נחשב את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x)}{x^3 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x)}{x \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x)}{x} \frac{1}{\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} \stackrel{0+\infty}{=} 0$$

שימו לב שזה נכון כיוון ש

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^2} \stackrel{L'Hopital}{=} 1$$

לכן לאינטגרל רק צד אחד "בעייתי" באינסוף.

נפעיל את מבחן ההשוואה הגבולי לאינטגרלים חיוביים עם האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ ונקבל

שהם חברים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{x^3 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) \frac{x^3}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^{2.5}} \right)} = \frac{\pi}{2}$$

כיוון ש $3 > 1$ שני האינטגרלים מתכנסים.

ב. מצאו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \left[\ln(\sqrt[n]{n+k}) - \ln(\sqrt[n]{n}) \right]$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left[\ln(n+k) - \ln(n) \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left[\ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right]$$

וזהו סכום רימן בקטע $[0, 1]$ עם החלוקה $\left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}$ והנקודות $\left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}$ של

הפונקציה $\ln(1+x)$.

כיוון שזו פונקציה רציפה בקטע הסגור, היא אינטגרלית, ולכן סכומי הרימן שואפים לאינטגרל, כאשר פרמטר החלוקה שואף לאפס. פרמטר החלוקה כאן הוא $\frac{1}{n}$, והוא אכן

שואף לאפס.

לכן

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \int_0^1 \ln(1+x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f' = 1, g = \ln(1+x) \\ f = x, g' = \frac{1}{1+x} \end{array} \right\} = [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \\ &= \ln(2) - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx = \ln(2) - [x - \ln(1+x)]_0^1 = 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

3. נגדיר: $f(x) = \frac{1-2x}{(x+2)(x^2+1)}$.

א. מצאו את טור מקלורין של f וקבעו באיזה תחום הוא מתכנס. (אפשר להשאיר את התשובה כסכום של שני טורים.)

ראשית, באמצעות פירוק לשברים חלקיים נגלה כי

$$f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2+1}$$

כעת נחשב את הטורים:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{-x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

$$-\frac{x}{x^2+1} = -x \frac{1}{1-(-x^2)} = -x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = -x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+1}$$

כמו כן, רדיוס ההתכנסות של הטור הראשון הינו $R_1 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1}}}} = 2$

של הטור השני הינו $R_2 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1}} = 1$.

לכן הטור מתכנס עבור $-1 < x < 1$ כיוון שמדובר בסכום של שני טורים מתכנסים, ולא מתכנס עבור $1 < x < 2$ כיוון שמדובר בסכום של טור מתכנס וטור מתבדר. לכן בהכרח רדיוס ההתכנסות של סכום הטורים הינו $R = 1$.

בקצוות $x = \pm 1$ הטור הראשון מתכנס והשני לא, ולכן הסכום אינו מתכנס. סה"כ תחום ההתכנסות הינו $(-1, 1)$.

ב. חשבו את $f^{(2015)}(0)$.

$$\frac{f^{(2015)}(0)}{2015!} = -\frac{1}{2^{2016}} + 1$$

ולכן

$$f^{(2015)}(0) = -\frac{2015!}{2^{2016}} + 2015!$$

4. נניח ש- $f(x)$ פונקציה חסומה ואינטגרבילית רימן-דרבו בקטע $[0, 4]$. עוד נניח שלכל תת-קטע $I \subset [0, 4]$ קיימת (לפחות) נקודה אחת $x_0 \in I$ כך ש- $f(x_0) \leq 2$.

$$\int_0^4 f(x) dx \leq 8 \text{ ש- הוכיחו}$$

תהי חלוקה כלשהי של הקטע $[0, 4]$. ניקח סכום רימן של הפונקציה על החלוקה, ובכל חלק נבחר נקודה עבורה $f(c_i) \leq 2$.

$$\sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| f(c_k) \leq 2 \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| = 2(4-0) = 8$$

לכן סכום הרימן הינו 8 . לפי משפט, עבור פונקציה אינטגרבילית, סכומי הרימן שואפים לאינטגרל. כיוון שכל סכומי הרימן קטנים או שווים ל- 8 , כך גם גבולם. (באופן מפורט, אם האינטגרל היה גדול מ- 8 , נבחר את אפסילון להיות חצי המרחק בין האינטגרל לבין 8 , ולכן חייב להיות סכום רימן שקרוב לאינטגרל עד כדי אפסילון, ולכן חייב להיות גדול ממש מ- 8).

5. א. מצאו את טור פוריה של ההמשך המחזורי של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \pi x & 0 \leq x \leq \pi \\ -f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

ראשית נבחין כי $f(x)$ פונקציה אי זוגית.

$$f(-x) = \begin{cases} -x^2 + \pi x & 0 \leq x \leq \pi \\ x^2 + \pi x & -\pi < x < 0 \end{cases} = -f(x)$$

לכן טור הפורייה הוא בעצם טור סינוסים.

כעת,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x^2 - \pi x) \sin(nx) dx = \left\{ \begin{array}{l} f' = \sin(nx), g = x^2 - \pi x \\ f = \frac{-\cos(nx)}{n}, g' = 2x - \pi \end{array} \right\} = \left[\frac{-2(x^2 - \pi x) \cos(nx)}{\pi n} \right]_0^\pi +$$

$$+ \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi (2x - \pi) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi (2x - \pi) \cos(nx) dx = \left\{ \begin{array}{l} f' = \cos(nx), g = 2x - \pi \\ f = \frac{\sin(nx)}{n}, g' = 2 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left[\frac{(2x - \pi) \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^\pi 2 \sin(nx) dx = \left[\frac{4}{\pi n^3} \cos(nx) \right]_0^\pi = \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3}$$

סה"כ טור הפורייה של הפונקציה הינו

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \sin(nx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi (2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

ב. קבעו באיזה תחום הטור מתכנס ל- $f(x)$.

כיוון ש $f(x)$ רציפה והמשך המחזורי שלה רציף בכל נקודה
($\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 0$), וכמו כן הנגזרות החד צדדיות
שלה קיימות בכל נקודה, טור הפוריה מתכנס לכל x .

6. תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות גזירות שמתכנסות בקטע סגור $[a, b]$ לפונקציית הגבול
גזירה $f(x)$. נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [a, b]$, $f'_n(x) > f'(x)$. הוכיחו כי
 $f_n \rightarrow f$ במ"ש ב- $[a, b]$. (הדרכה: התבוננו ב- $\sup |f_n(x) - f(x)|$).

נשתמש במבחן \limsup .

כיוון ש $(f_n(x) - f(x))' = f'_n(x) - f'(x) > 0$, נובע כי פונקציה מונוטונית
עולה ומקבלת את המינימום והמקסימום שלה בקצוות.

לכן $\sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max \{|f_n(a) - f(a)|, |f_n(b) - f(b)|\}$

כיוון שסדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית,

$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(b) - f(b)| = 0$ וגם $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(a) - f(a)| = 0$

ולכן ביחד $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \{|f_n(a) - f(a)|, |f_n(b) - f(b)|\} = 0$

לכן סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש.