אלגברה מופשטת 4 – תרגיל 5 - פתרון

שאלה 1

יהי $n>2$ ויהי $\rho_n=\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. נגדיר $a_n=\rho_n+\rho_n^{-1}$ ו-$K=\mathbb{Q}[a_n]$.

1. מצאו את הפולינום המינימלי של ρ_n מעל K. [רמז: $a_n\in\mathbb{R}$.]
2. נניח ש-n ראשוני. מה דרגת הפולינום המינמלי של a_n? (אין צורך לחשב את הפולינום)
3. מצאו את הפולינום המינימלי של a_5.
4. הביעו את ρ_5 בעזרת מספרים רציונליים ושורשים ריבועיים. (העזרו ב-3 ו-1.)

פתרון

תשובה ל-1: מתקיים $a_n\rho_n=\rho_n^2+1$ ולכן ρ_n שורש של הפולינום $x^2-a_nx+1\in K[x]$. אם זה לא הפולינום המינימלי של ρ_n מעל K אז $\rho_n\in K\subseteq\mathbb{R}$ (כי $a_n=\rho_n+\overline{\rho_n}\in\mathbb{R}$) וזה בלתי אפשרי כי $\rho_n\notin\mathbb{R}$ עבור $n>2$. לכן, הפולינום המינימלי של ρ_n מעל K הוא x^2-a_nx+1.

תשובה ל-2: יהי f הפולינום המינימלי של a_n, אזי $\deg f=[K:\mathbb{Q}]=\frac{[\mathbb{Q}[\rho_n]:\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}[\rho_n]:K]}=\frac{n-1}{2}$ (מסעיף 1 נובע ש-$[\mathbb{Q}[\rho_n]:K]=2$, ובכיתה הוכחנו שהפולינום המינימלי של ρ_n עבור n ראשוני הוא ממעלה $n-1$).

תשובה ל-3: לפי 2 אנחנו יודעים שהפולינום המינימלי של a_5 הוא ממעלה $\frac{5-1}{2}=2$. אפשר למצוא אותו על ידי מציאת תלות לינארית (מעל $\mathbb{Q}$) בין האיברים $1,a_5,a_5^2$ (ניתן להעזר בכך ש-$\{1,\rho_5,\rho_5^2,\rho_5^3\}$ בסיס ל-$\mathbb{Q}[\rho_5]$ מעל $\mathbb{Q}$). באמת:

$$a_5=\rho_5+\rho_5^{-1}=\rho_5+\rho_5^4=\rho_5+\left(-1-\rho_5-\rho_5^2-\rho_5^3\right)=-1-\rho_5^2-\rho_5^3$$

$$a_5^2=\rho_5^2+2+\rho_5^{-2}=2+\rho_5^2+\rho_5^3$$

(בשוויון האדום השתמשנו בכך שהפולינום המינילי של ρ_5 הוא $x^4+x^3+x^2+x+1$). כעת, קל לראות כי $a_5^2+a_5-1=0$ וזה אומר ש-x^2+x-1 הוא הפולינום המינימלי של a_5 מעל $\mathbb{Q}$.

תשובה ל-4: לפי סעיף 3 $a_5\in\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. היות ו-$a_5>0$ (בדקו!) נובע ש-$a_5=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. לפי סעיף 1, ρ_5 הוא שורש של הפולינום x^2-a_nx+1 ולכן $\rho_5\in\left\{\frac{a_n\pm\sqrt{a_n^2-4}}{2}\right\}$. היות והחלק הממשי של ρ_5 הוא חיובי, צריך לבחור + ולכן נקבל:

$$\rho_5=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2-4}}{2}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}-4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}+2\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-4}}{4}=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$$

שאלה 2

יהיו a,b,c,d ארבעה שורשים שונים של הפולינום $x^5-5x+15$. נגדיר $u=a^2+b^2+c^2+d^2$. חשבו את $[\mathbb{Q}[u]:\mathbb{Q}]$. [רמז: חשבו על הקשרים בין שורשי הפולינום.]

פיתרון

$x^5-5x+15$ הוא אי פריק מעל $\mathbb{Q}$ (אייזנשטיין ביחס ל-5) ולכן ספרבילי (כי $char\mathbb{Q}=0$). כלומר, יש לו 5 שורשים שונים: $\alpha_1,\dots,\alpha_5$. בלי הגבלת כלליות $a=\alpha_1, b=\alpha_2, c=\alpha_3, d=\alpha_4$. לפי נוסחאות ויאטה הכלליות מתקיים $\alpha_1+\cdots+\alpha_5=0$ (כי המקדם של x^4 ב-$x^5-5x+15$ הוא 0) ו-$\sum_{1\le i<j\le 5}\alpha_i\alpha_j=0$ (כי המקדם של x^3 ב-$x^5-5x+15$ הוא 0). לכן:

$$0=\left(\sum_{1\le i\le 5}\alpha_i\right)^2-2\sum_{1\le i<j\le 5}\alpha_i\alpha_j=\sum_{1\le i\le 5}\alpha_i^2$$

זה אומר ש-$u=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=-\alpha_5^2$. לכן, $u\in\mathbb{Q}[\alpha_5]$ ונובע כי:

$$[\mathbb{Q}[u]:\mathbb{Q}]\,\big|\,[\mathbb{Q}[\alpha_5]:\mathbb{Q}]=\deg(x^5-5x+15)=5$$

לכן, $[\mathbb{Q}[u]:\mathbb{Q}]\in\{1,5\}$. אם $[\mathbb{Q}[u]:\mathbb{Q}]=1$ אז $u\in\mathbb{Q}$ וזה אומר ש-α_5 מתאפס ע"י פולינום ממעלה 2 – בסתירה לכך ש-$x^5-5x+15$ הוא הפולינום המינימלי שלו. לכן, $[\mathbb{Q}[u]:\mathbb{Q}]=5$.

שאלה 3

מצאו את כל תתי השדות של $\mathbb{C}$ שאיזומורפיים ל-$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$. נמקו את קביעתכם.

פיתרון

יהי $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ו-$f(x)=\sum a_i x^i$ הפולינום המינימלי של α מעל $\mathbb{Q}$. בכיתה ראינו שהשדות $K\subseteq\mathbb{C}$ שאיזומורפיים ל-$\mathbb{Q}[\alpha]$ הם בדיוק השדות מהצורה $\mathbb{Q}[\beta]$ באשר β שורש של f.

הסבר: יהי $K\subseteq\mathbb{C}$ כך ש יש איזומורפיזם של שדות $\psi:\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]\to K$. היות ו-$\psi(1)=1$, נובע ש-$\psi|_{\mathbb{Z}}=id_{\mathbb{Z}}$ ולכן $\psi|_{\mathbb{Q}}=id_{\mathbb{Q}}$, כלומר ψ הוא $\mathbb{Q}$-הומומורפיזם. לכן, $\psi(\alpha)$ הוא גם שורש של f כי:

$$f(\psi(\alpha))=\sum a_i\psi(\alpha)^i=\sum\psi(a_i)\psi(\alpha^i)=\psi\left(\sum a_i\alpha^i\right)=\psi(f(\alpha))=0$$

אבל $[\mathbb{Q}[\psi(\alpha)]:\mathbb{Q}]=\deg f=[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}]=[K:\mathbb{Q}]$ (השוויון האחרון נכון כי ψ הוא $\mathbb{Q}$-הומומורפיזם) ולכן בהכרח $K=\mathbb{Q}[\psi(\alpha)]$. כלומר, $K=\mathbb{Q}[\beta]$ באשר β שורש של f.

מצד שני, אם β שורש של f אז $\mathbb{Q}[\beta]\cong\mathbb{Q}[x]/\langle f\rangle\cong\mathbb{Q}[\alpha]$. **סוף הסבר.**

נמצא את השורשים האחרים של f:

$$\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha+2=\left(\alpha-\sqrt{2}\right)^2=2+\sqrt{2}$$

מכאן נובע:

$$\alpha^2=\sqrt{2}(2\alpha+1)$$

$$(\alpha^2)^2=2(2\alpha+1)^2$$

לכן, α מאפס את $x^4-2(4x^2+4x+1)=x^4-8x^2-8x-2$. זה פולינום אייזנשטיין ביחס ל-2 ולכן הוא אי פריק מעל $\mathbb{Q}$. זה אומר ש-$f(x)=x^4-8x^2-8x-2$.

מהמשוואה האדומה, נובע ששורשי f מקיימים $x^2 = \sqrt{2}(2x+1)$ או $x^2 = -\sqrt{2}(2x+1)$.
מהאפשרות הראשונה נקבל את השורשים $\alpha_{1,2} = \frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8+4\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}}$. מהאפשרות השנייה נקבל את השורשים $\alpha_{3,4} = \frac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-4\sqrt{2}}}{2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

כעת נשים לב ש-$\mathbb{Q}[\alpha_1] = \mathbb{Q}[\alpha_2]$. דרך קצרה לראות זאת היא לשים לב ש-$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$ (בדקו!) ולכן $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$. המימד של שדה זה מעל $\mathbb{Q}$ הוא 4 (בדקו!) ולכן בהכרח $\mathbb{Q}[\alpha_1] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right] = \mathbb{Q}[\alpha_2]$ (כי כל השדות האלו ממימד 4).

באותו אופן, $\mathbb{Q}[\alpha_3] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2-\sqrt{2}}\right] = \mathbb{Q}[\alpha_4]$.

אבל למעשה, $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$ כי:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$$

(זה מראה $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right] \subseteq \mathbb{Q}\left[\sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$ ובגלל שלשניהם אותו מימד מעל $\mathbb{Q}$ יש שוויון). לכן, $\mathbb{Q}[\alpha_1] = \mathbb{Q}[\alpha_2] = \mathbb{Q}[\alpha_3] = \mathbb{Q}[\alpha_4]$.

לסיכום: יש רק תת שדה אחד של $\mathbb{C}$ שאיזומורפי ל-$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$ והוא השדה $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$.

הערה: התשובות $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$, $\mathbb{Q}\left[-\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$ וכיו"ב גם נכונות, אבל לא מפני ש-$-\sqrt{2} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}}$ ו-$\sqrt{2} \mp \sqrt{2-\sqrt{2}}$ שורשים של f (הם לא).

שאלה 4

מצאו את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים וחשבו את המימד שלהם:

1. $x^4 - 6x^2 - 2$
2. $x^6 - 27$

פיתרון

הערה: בסעיפים השונים נשתמש בעובדה הבאה (שהיא די קלה להוכחה ואתם רשאים להשתמש בה): תהי E/F הרחבת שדות אלגברית, $a \in E$ ו-$b \in F$, אזי $F[a] = F[a+b] = F[ab] = F\left[\frac{a}{b}\right]$.
מסקנה מיידית: אם $a, b \in E$ אז $F[a,b] = F[a,a+b] = F[a,ab] = F\left[a,\frac{a}{b}\right]$.

תשובה ל-1: t שורש של $x^4 - 6x^2 - 2$ אם ורק אם $t^2 = \frac{6\pm\sqrt{36+8}}{2} = 3 \pm \sqrt{11}$. לכן, שורשי הפולינום $x^4 - 6x^2 - 2$ הם $\pm\sqrt{3\pm\sqrt{11}}$. לכן, שדה הפיצול של $x^4 - 6x^2 - 2$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $E = \mathbb{Q}\left[\pm\sqrt{3\pm\sqrt{11}}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{3+\sqrt{11}}, \sqrt{3-\sqrt{11}}\right]$.

כדי לחשב את המימד $[E:\mathbb{Q}]$ נגדיר $K=\mathbb{Q}\left[\sqrt{3+\sqrt{11}}\right]$. $\sqrt{3+\sqrt{11}}$ הוא שורש של x^4-6x^2-2 וזה פולינום אי פריק (אייזנשטיין ביחס ל-2). לכן $[K:\mathbb{Q}]=\deg(x^4-6x^2-2)=4$.

נשים לב ש-$\sqrt{11}\in K$ (בדקו!) ולכן $\left(\sqrt{3-\sqrt{11}}\right)^2\in K$. זה אומר ש-$[E:K]\leq 2$. אם $[E:K]=1$ אז $\sqrt{3-\sqrt{11}}\in K$ אבל זה בלתי אפשרי כי $\sqrt{3-\sqrt{11}}\notin\mathbb{R}$ ו-$K\subseteq\mathbb{R}$ (כי $\sqrt{3+\sqrt{11}}\in\mathbb{R}$). לכן, $[E:K]=2$ וקיבלנו ש-$[E:\mathbb{Q}]=[E:K][K:\mathbb{Q}]=2\cdot 4=8$.

תשובה ל-2: שורשי הפולינום x^6-27 הם $\left\{\rho_6^i\sqrt{3}\right\}_{i=0}^5=\left\{\rho_6^i\sqrt[3]{27}\right\}_{i=0}^5$ לכן שדה הפיצול של x^6-27 הוא $E=\mathbb{Q}\left[\sqrt{3},\rho_6\sqrt{3},\dots,\rho_6^5\sqrt{3}\right]=\mathbb{Q}\left[\rho_6,\sqrt{3}\right]$. היות ו-$\rho_6=\exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$ מתקיים: $E=\mathbb{Q}\left[\rho_6,\sqrt{3}\right]=\mathbb{Q}\left[\frac{\sqrt{-3}}{2},\sqrt{3}\right]=\mathbb{Q}\left[i,\sqrt{3}\right]$.

כעת $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\right]=2$ ו-$\left[\mathbb{Q}\left[i,\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]\right]\leq[\mathbb{Q}[i]:\mathbb{Q}]=2$. אם $\left[\mathbb{Q}\left[i,\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]\right]=1$ אז $i\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]\subseteq\mathbb{R}$ וזה בלתי אפשרי. לכן, $\left[\mathbb{Q}\left[i,\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]\right]=2$ וקיבלנו $[E:\mathbb{Q}]=\left[\mathbb{Q}\left[i,\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]\right]\cdot\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]:\mathbb{Q}\right]=2\cdot 2=4$.

הערה: אפשר גם להראות ישירות ש-$i\notin\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.