# פתרון תרגיל 5 - לינארית

1) איזה מהקבוצות הבאות היא באמת תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית!

א. $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1=b_2\}$

ב. $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1=1\}$

ג. $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1b_2b_3=0\}$.

ד. $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1+b_2+b_3=0\}$.

ה. $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1\le b_2\le b_3\}$.

**<u>פתרון:</u>**

א) קודם כל, נשים לב שאיבר ה-0 נמצא בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:

יהיו $(x_1,x_1,z_1),(x_2,x_2,z_2)\in\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1=b_2\}$ וסקלר $\alpha$. אז נקבל:

$$(x_1,x_1,z_1)+\alpha(x_2,x_2,z_2)=(x_1+\alpha x_2,x_1+\alpha x_2,z_1+\alpha z_2)\in\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1=b_2\}$$

לכן, הקבוצה $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1=b_2\}$ היא באמת תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ב) הקבוצה הנ"ל לא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ כיוון שהיא לא מכילה את איבר ה-0.

ג) קודם כל, נשים לב שאיבר ה-0 נמצא בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:

יהיו $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1b_2b_3=0\}$ וסקלר $\alpha$. אז נקבל:

$$(x_1,y_1,z_1)+\alpha(x_2,y_2,z_2)=(x_1+\alpha x_2,y_1+\alpha y_2,z_1+\alpha z_2)$$

נשים לב שמתקיים: $(0+\alpha 1)(1+\alpha 0)(1+\alpha 1)=\alpha^2$ וכמובן לא שונה מ-0.

לכן, הקבוצה $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1b_2b_3=0\}$ היא לא תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ד) קודם כל, נשים לב שאיבר ה-0 נמצא בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:

יהיו $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1+b_2+b_3=0\}\ni(x_1,y_1,-x_1-y_1),(x_2,y_2,-x_2-y_2)$ וסקלר $\alpha$.

אז נקבל:

$$(x_1,y_1,-x_1-y_1)+\alpha(x_2,y_2,-x_2-y_2)=(x_1+\alpha x_2,y_1+\alpha y_2,-x_1-y_1-\alpha x_2-\alpha y_2)$$

שכמובן שייך לקבוצה הנ"ל ולכן הקבוצה $\{(b_1,b_2,b_3)\mid b_1+b_2+b_3=0\}$ היא באמת תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ה) הקבוצה הנ"ל היא לא תת מרחב מכיוון ניקח כל סקלר שלילי ונכפול בווקטור בקבוצה נקבל שינוי בכיוון אי השוויון.

2) כתוב את הפתרון השלם של המערכת ההומוגנית הבאה :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+2x_2+3x_3+5x_4=0\\ 2x_3+4x_4=0\end{cases}$$

הוכיחו כי זהו תת-מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^4$.

**פתרון:**

נתחיל בדירוג את המטריצה:

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&0\\1&2&3&5&0\\0&0&2&4&0\end{array}\right\rangle \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2} \left\langle\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&0\\0&0&2&4&0\\0&0&2&4&0\end{array}\right\rangle \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left\langle\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&0\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right\rangle$$

נשים לב שיש לנו שורת אפסים בנוסף לכך שיש משוואה אחת פחות מנעלמים ולכן נצטרך להשתמש בשתי משתנים כפרמטרים: $x_2=t, x_4=s$. לכן, הפתרון יהיה $\left(x_1=-2t+s, x_2=t, x_3=-2s, x_4=s\right)$ ולכן מרחב הפתרונות יהיה: $V=\left\{\left(-2y+w, y, -2w, w\right) \middle| y,w\in\mathbb{R}\right\}$. נשאר להוכיח ש- $V$ תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^4$:

קודם כל, נשים לב שאיבר ה-0 נמצא בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:

יהיו $\left(-2y_1+w_1, y_1, -2w_1, w_1\right), \left(-2y_2+w_2, y_2, -2w_2, w_2\right)\in V$ וסקלר $\alpha$. אז נקבל:

$$\left(-2y_1+w_1, y_1, -2w_1, w_1\right)+\alpha\left(-2y_2+w_2, y_2, -2w_2, w_2\right)=$$

$$=\left(-2\left(y_1+\alpha y_2\right)+\left(w_1+\alpha w_2\right), \left(y_1+\alpha y_2\right), -2\left(w_1+\alpha w_2\right), \left(w_1+\alpha w_2\right)\right)\in V$$

מ.ש.ל.

3) יהא $V=\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שכל אחת מהקבוצות הבאות מהווה תת-מרחב של $V$ (ביחס לפעולות של $V$):

א. המטריצות הסימטריות.

ב. המטריצות האלכסוניות.

ג. המטריצות המשולשיות העליונות.

**פתרון:**

א) קודם כל, נשים לב שמטריצת האפס היא מטריצה סימטרית ולכן היא נמצאת בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:

יהיו $A,B\in W$ וסקלר $\alpha$. אז נקבל:

$$\left(A+\alpha B\right)_{ij}=\left(A\right)_{ij}+\alpha\left(B\right)_{ij}=\left(A\right)_{ji}+\alpha\left(B\right)_{ji}=\left(A+\alpha B\right)_{ji}$$

כלומר, המטריצה החדשה סימטרית ולכן $A+\alpha B\in W$. לכן, קבוצת המטריצות הסימטריות מהווה תת-מרחב של $V$.

ב) קודם כל, נשים לב שמטריצת האפס היא מטריצה אלכסונית ולכן היא נמצאת בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:

יהיו $A,B\in W$ וסקלר $\alpha$. אז נקבל עבור $i\neq j$:

$$\left(A+\alpha B\right)_{ij}=\left(A\right)_{ij}+\alpha\left(B\right)_{ij}=0$$

כלומר, המטריצה החדשה אלכסונית ולכן $A+\alpha B\in W$. לכן, קבוצת המטריצות האלכסוניות מהווה תת-מרחב של $V$.

ג) קודם כל, נשים לב שמטריצת האפס היא מטריצה משולשית עליונה ולכן היא נמצאת בקבוצה. כעת, נשתמש בקריטריון המקוצרר:

יהיו $A,B\in W$ וסקלר $\alpha$. אז נקבל עבור $i<j$:

$$\left(A+\alpha B\right)_{ij}=\left(A\right)_{ij}+\alpha\left(B\right)_{ij}=0$$

כלומר, המטריצה החדשה משולשית עליונה ולכן $A+\alpha B\in W$. לכן, קבוצת המטריצות המשולשיות העליונות מהווה תת-מרחב של $V$.

4) קבע האם הווקטורים הבאים תלויים לינארית או בלתי תלויים לינארית:

$$a.\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\quad b.\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right\},\quad c.\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}\right\}$$

**<u>פתרון:</u>** לפני שנתחיל לפתור את התרגיל נשים לב שאם נכתוב את הווקטורים האלו כשורות מטריצה אז הם יהיו בת"ל אם אפשר לדרג אותה לצורה קנונית ואחרת הם יהיו ת"ל.

א) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2-R_3\to R_2]{R_1-R_2\to R_1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. לכן הוקטורים בת"ל.

ב) $\begin{pmatrix}2&4&1\\0&2&1\\0&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-2R_2\to R_3}\begin{pmatrix}2&4&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. לכן הווקטורים ת"ל.

ג) $\begin{pmatrix}3&4&1\\2&2&0\\5&6&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\begin{pmatrix}3&4&1\\2&2&0\\3&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\begin{pmatrix}3&4&1\\2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. לכן הווקטורים ת"ל.

5) האם הוקטור $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ הוא צ"ל של הקבוצות הבאות ? אם כן, רשמו את הצ"ל המפורש. אם קיים יותר מצ"ל יחיד עבור אחת הקבוצות, יש לרשום את הפתרון הכללי וכן דוגמה מפורשת אחת.

$$a.\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\quad b.\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\right\},\quad c.\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

**<u>פתרון:</u>** לפני שנתחיל לפתור את התרגיל נשים לב שאם נכתוב את הווקטורים האלו כעמודות מטריצה ואת הווקטור הנתון כעמודת הפתרון אז יהיה לווקטור צ"ל אם יהיה פתרון למערכת המשוואות שנוצרה.

א)

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&1&0&4\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle\xrightarrow[R_2-R_3\to R_2]{R_1-R_2\to R_1}\left\langle\begin{array}{ccc|c}0&0&1&-1\\0&1&0&3\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left\langle\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{array}\right\rangle.$$

לכן, קיים צ"ל: $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

ב) $\left\langle\begin{array}{ccc|c}2&1&2&3\\2&2&4&4\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle\xrightarrow[R_2-2R_3\to R_2]{R_1-2R_3\to R_1}\left\langle\begin{array}{ccc|c}0&1&2&1\\0&2&4&2\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle\xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2}\left\langle\begin{array}{ccc|c}0&1&2&1\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{array}\right\rangle$.

לכן, קיים יותר מצ"ל יחיד מהצורה: $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+(1-2\alpha)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$.

דוגמה מפורשת: $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$.

ג)

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c}3&2&5&3\\4&2&6&4\\1&-2&1&1\end{array}\right\rangle\xrightarrow{R_2-4R_3\to R_2}\left\langle\begin{array}{ccc|c}3&2&5&3\\0&10&2&0\\1&-2&1&1\end{array}\right\rangle\xrightarrow{R_1-3R_3\to R_1}\left\langle\begin{array}{ccc|c}0&8&2&0\\0&10&2&0\\1&-2&1&1\end{array}\right\rangle$$

$$\xrightarrow{5R_3+R_2\to R_3}\left\langle\begin{array}{ccc|c}0&8&2&0\\0&10&2&0\\5&0&7&5\end{array}\right\rangle\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\left\langle\begin{array}{ccc|c}0&8&2&0\\0&2&0&0\\5&0&7&5\end{array}\right\rangle\xrightarrow{R_1-4R_2\to R_1}\left\langle\begin{array}{ccc|c}0&0&2&0\\0&2&0&0\\5&0&7&5\end{array}\right\rangle$$

.

לכן, קיים צ"ל יחיד מהצורה: $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}$.