

פתרון תרגיל בית מספר 1

שאלה 1

הוכח שבשדה מתקיימים התכונות הבאות:

- לכל $a \in F$ מתקיים $-(-a) = a$.
- לכל $a \in F$ מתקיים $(-1) \cdot a = -a$.
- לכל שני איברים $a, b \in F$ מתקיים $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

פתרון

- יהי $a \in F$. בשדה לכל איבר יש איבר נגדי. נסמן $b = -a$.
ז"א $a + b = 0$ ולכן a הוא איבר נגדי של b ז"א $a = -b = -(-a)$.
- יהי $a \in F$ ויהי 1 האיבר הניטרלי לכפל בשדה ויהי -1 האיבר הנגדי ל 1.
 $0 = 0 \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a$
סה"כ קיבלנו ש $a + (-1) \cdot a = 0$ ולכן $(-1) \cdot a$ הוא האיבר הנגדי ל a ז"א $(-1) \cdot a = -a$.
- יהיו $a, b \in F$. מסעיף קודם $-a = (-1) \cdot a, -b = (-1) \cdot b$
 $(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b$
נשאר להוכיח ש $(-1) \cdot (-1) = 1$. מסעיף ב $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$ מסעיף א $-(-1) = 1$.

שאלה 2

הוכח שאם $\text{char}(F) \neq 0$, אזי $\text{char}(F)$ הוא מספר ראשוני.

$$\text{(רמז: הוכח ש } (n \cdot 1_F) \cdot (m \cdot 1_F) = (nm) \cdot 1_F \text{)}$$

פתרון

$$(n \cdot 1_F) \cdot (m \cdot 1_F) = (nm) \cdot 1_F, \text{ ולכן } \underbrace{(1_F + 1_F + \dots + 1_F)}_{n\text{-times}} \cdot \underbrace{(1_F + 1_F + \dots + 1_F)}_{m\text{-times}} = \underbrace{(1_F + 1_F + \dots + 1_F)}_{nm\text{-times}}$$

אם $\text{char}(F)$ אינו ראשוני אז קיימים m, n כך ש $m \cdot n = \text{char}(F)$.
מכיוון ש $m < m \cdot n$ ו $n < m \cdot n$ אז $n \cdot 1_F \neq 0, m \cdot 1_F \neq 0$ אבל $(nm) \cdot 1_F = 0$.

שאלה 3

הוכח שהקבוצה $\square[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \square\}$, עם פעולות החיבור והכפל של שדה הממשיים היא שדה.

פתרון

נראה שכל האקסיומות מתקיימות.

מוגדרות:

יהיו $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

ז"א $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ מכיון ש \square שדה קיים איבר יחיד $a+b$ \square ואיבר יחיד $b+d$ ב \mathbb{Q} .

ולכן קיים איבר יחיד $(a+c)+(b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

נשים לב שפעולת החיבור היא כמו פעולת החיבור על שדה הממשיים והאיברים $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}$ שייכים לשדה הממשיים, ולכן מתקיים:

$$(*) a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2} = a+c+b\sqrt{2}+d\sqrt{2} = a+c+(b+d)\sqrt{2}$$

השוויון הראשון נובע מאקסיומת החילוף והשוויון השני נובע מאקסיומת הפילוג.

בנוסף פעולת הכפל היא כמו פעולת הכפל על שדה הממשיים והאיברים $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}$ שייכים לשדה הממשיים, ולכן מתקיים:

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd = ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}$$

השוויון הראשון נובע מאקסיומת הפילוג והשוויון השני נובע מאקסיומת הפילוג ומאקסיומת החילוף.

מכיון ש \square שדה קיים איבר יחיד $ac+2bd \in \mathbb{Q}$ ואיבר יחיד $ad+bc \in \mathbb{Q}$.

חילוף

יהיו $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

מכיון שפעולת החיבור היא כמו פעולת החיבור על שדה הממשיים והאיברים $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}$ שייכים לשדה הממשיים מתקיים:

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) = a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}+a+b\sqrt{2} = (c+d\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2})$$

השוויון הראשון נובע מקיבוץ השוויון השני נובע מחילוף והשלישי מקיבוץ.

בנוסף פעולת הכפל היא כמו פעולת הכפל על שדה הממשיים והאיברים $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}$ שייכים לשדה הממשיים, ולכן מתקיים:

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd = ac+bc\sqrt{2}+ad\sqrt{2}+2bd = c(a+b\sqrt{2})+d\sqrt{2}(a+b\sqrt{2}) = (c+d\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})$$

השוויון הראשון נובע מפילוג השוויון, השני נובע מחילוף והשלישי והרביעי מפילוג.

איבר נטרלי לחיבור

יהי $0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ מכיוון ש $a + b\sqrt{2}$ שייך לשדה הממשיים ו 0 הוא האיבר נטרלי לחיבור בשדה הממשיים נקבל ש $a + b\sqrt{2} + 0 + 0\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$.

איבר נטרלי לכפל

יהי $1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ מכיוון ש $a + b\sqrt{2}$ שייך לשדה הממשיים ו 1 הוא האיבר נטרלי לכפל בשדה הממשיים נקבל ש $(a + b\sqrt{2})(1 + 0\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$.

איבר נגדי

יהי $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ מכיוון שקבוצת הרציונלים היא שדה אז ל a יש איבר נגדי בקבוצת הרציונלים נסמן אותו ב $-a$. באותו אופן ל b יש איבר נגדי בקבוצת הרציונלים נסמן אותו ב $-b$. ז"א $-a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

$$(a + b\sqrt{2}) + (-a - b\sqrt{2}) = (a - a) + (b - b)\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2}$$

השוויון הראשון נובע מ * בהוכחת המוגדרות.

איבר הופכי

יהי $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ האיבר ההופכי הוא $\frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$ (בדוק!).

את ההוכחה לפילוג וקיבוץ אני משאיר לכם.

שאלה 4

פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^3 - 10z^2 + 34z = 0$

ב. $z^2 - (1 - 3i)z - 2i - 2 = 0$

ג. $(i + 1)(x + iy) = 4 + 2i$. מספרים ממשיים x, y .

פתרון

א.

$$z^3 - 10z^2 + 34z = 0$$

$$. z^2 - 10z + 34 = 0 \text{ ש או } z = 0 \text{ ש או } z(z^2 - 10z + 34) = 0$$

$$z^2 - 10z + 34 = 0$$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$z_1 = 5 + 3i$$

$$z_2 = 5 - 3i$$

$$. z_1 = 5 + 3i, z_2 = 5 - 3i, z_3 = 0$$

.ב.

$$z^2 - (1 - 3i)z - 2i - 2 = 0$$

$$z = \frac{1 - 3i \pm \sqrt{(1 - 3i)^2 + 8i + 8}}{2} = \frac{1 - 3i \pm \sqrt{2i}}{2}$$

$$(1 + i)^2 = 2i \text{ ש ראינו בתרגול}$$

$$z = \frac{1 - 3i \pm (1 + i)}{2}$$

$$z_1 = 1 - i$$

$$z_2 = -2i$$

$$. z_1 = 1 - i, z_2 = -2i$$

.ג.

$$(i + 1)(x + iy) = 4 + 2i$$

$$x - y + (x + y)i = 4 + 2i$$

$$. a + bi = c + di \leftrightarrow a = c \wedge b = d \text{ ש בתרגול ראינו}$$

לכן יש לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = -1$$

$$. x = 3, y = -1 \text{ ש תשובה סופית:}$$

שאלה 5

חשב, ללא שימוש במשפט דה מואבר, את הביטויים הבאים:

א. $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^8$

ב. $\frac{5}{3+2i}$

ג. $(1+i+i^2+\dots+i^{34})^{71}$

פתרון

א. $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^8 = (\sqrt{2})^8 (1+i)^8 = 16((1+i)^2)^4 = 16(2i)^4 = 256$

ב. $\frac{5}{3+2i} = \frac{5}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{15-10i}{13} = \frac{15}{13} - \frac{10}{13}i$

ג. $(1+i+i^2+\dots+i^{34})^{71}$

תחילה נחשב את הסכום $1+i+i^2+\dots+i^{34}$

נשים לב ש $1+i+i^2+i^3=0$ ובאופן כללי לכל n טבעי מתקיים $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0$

ולכן $1+i+i^2+\dots+i^{34}+i^{35}=0 \rightarrow 1+i+i^2+\dots+i^{34}=-i^{35}$

$i^{35} = i^{4 \cdot 8} \cdot i^3 = -i$

כעת $(1+i+i^2+\dots+i^{34})^{71} = (-i)^{71} = -i^{71} = -i^{4 \cdot 17} \cdot i^3 = i$

שאלה 6

א. הראה שלכל מספר מרוכב $z = a + bi$ יש הופכי ונגדי.

ב. הוכח שלכל שני מספרים מרוכבים z_1, z_2 (השונים מ 0) מתקיים $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

ג. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, a_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

הוכח שלכל n טבעי סכום $6n$ האיברים הראשונים הוא 0.

ד. פתור, בעזרת משפט דה מואבר, את המשוואות הבאות:

i. $z^7 = 1$

ii. $z^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$

פתרון

ג. תחילה נמצא את מנת הסדרה.

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \cdot \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נחשב את הביטוי $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$

תחילה נציג את המספר $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ בצורה קוטבית. $r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow r = 1$

נמצאת ברביע הראשון, ולכן $\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \theta = 60^\circ$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$$

סה"כ נקבל: $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^6 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$

נחשב את הסכום של הסדרה ההנדסית.

מנת הסדרה היא $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$S_{6n} = \frac{a_1 \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{6n} - 1 \right)}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1} = \frac{a_1 (1^n - 1)}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = 0$$

ד.

$1 = \cos(360^\circ k) + i \sin(360^\circ k)$ כאשר k מספר שלם.

$$z^7 = \cos(360^\circ k) + i \sin(360^\circ k)$$

$$z_k = \cos\left(\frac{360^\circ k}{7}\right) + i \sin\left(\frac{360^\circ k}{7}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 6$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10} = (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)^{10} = \cos 450^\circ + i \sin 450^\circ = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$$

דרך נוספת לחישוב:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} \left((1+i)^2\right)^5 = \frac{1}{2^5} \cdot 2^5 \cdot i^5 = i = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$$

$$z^4 = \cos(90^\circ + 360^\circ k) + i \sin(90^\circ + 360^\circ k)$$

$$z_k = \cos(18^\circ + 72^\circ k) + i \sin(18^\circ + 72^\circ k)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

שאלת בונוס

חשב את הסכום $\sin \alpha + \sin(3\alpha) + \dots + \sin(2n-1)\alpha$ (רמז: משפט דה מאובר)
הדרכה לשאלה:

א. הראה שהסדרה:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha), (\cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha)), \dots, (\cos(2n-1)\alpha + i \sin(2n-1)\alpha)$$

היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את סכום הסדרה בעזרת הנוסחה שהראינו בתרגול.

ג. שים לב שבמספרים מרוכבים $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

פתרון

נשתמש במשפט דה מאובר: $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$

נתבונן בסדרה:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha), (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3, (\cos \alpha + i \sin \alpha)^5, \dots, (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2n-1}$$

נקבל סדרה הנדסית עם n איברים שמנתה $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2$ וממשפט דה מאובר נקבל ש

$$q = (\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha))$$

$$. q \neq 1 \quad S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{הוכחנו בתרגול שסכום סדרה הנדסית:}$$

מקרה א: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ במקרה זה מנת הסדרה שונה מ 1.

$$S_n = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha) \left((\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha))^n - 1 \right)}{(\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)) - 1} = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha) \left((\cos(2n\alpha) + i \sin(2n\alpha)) - 1 \right)}{(\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)) - 1}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2 \beta$ ונקבל (*) $\cos(2\beta) - 1 = -2\sin^2 \beta$.

שימו לב שמזהות (*) $\cos(2\alpha) - 1 = -2\sin^2(\alpha)$ ו $\cos(2n\alpha) - 1 = -2\sin^2(n\alpha)$.

$$S_n = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(i \sin(2n\alpha) + \cos(2n\alpha) - 1)}{i \sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) - 1} = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(i \sin(2n\alpha) - 2 \sin^2(n\alpha))}{i \sin(2\alpha) - 2 \sin^2(\alpha)}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ וזו $\sin(2n\alpha) = 2 \sin n\alpha \cos n\alpha$

$$S_n = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(i 2 \sin(n\alpha) \cos(n\alpha) - 2 \sin^2(n\alpha))}{i 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) - 2 \sin^2(\alpha)} = \frac{2 \sin(n\alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)(i \cos(n\alpha) - \sin(n\alpha))}{2 \sin(\alpha)(i \cos(\alpha) - \sin(\alpha))} =$$

$$= \frac{\sin(n\alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)(-\sin(n\alpha) + i \cos(n\alpha))}{\sin(\alpha)(-\sin(\alpha) + i \cos(\alpha))}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטריות $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ו $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$S_n = \frac{\sin(n\alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\alpha\right)\right)}{\sin(\alpha)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ ו $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$

$$S_n = \frac{\sin(n\alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\alpha\right)\right)}{\sin(\alpha)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)} =$$

$$= \frac{\sin(n\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + n\alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + n\alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin(n\alpha)}{\sin \alpha} \cdot (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) =$$

ניקח את החלק המדומה ונקבל שהסכום המבוקש הוא $\frac{\sin^2(n\alpha)}{\sin \alpha}$