

88-235 אנליזת פורייה – מבחן לדוגמא

מרצה: דר' ארז שיינר
משך המבחן: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 28 נק'
ענו על כל השאלות
כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

1. נסמן את טור הפורייה של $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ב $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$

א. מצאו את המקדמים a_n, b_n .

ב. חשבו את הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{1-4n^2}$.

2. תהי $f \in E$, ונסמן את מקדמי הפורייה שלה ב a_n, b_n . נגדיר את הפונקציות

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

א. הוכיחו כי טור הפורייה של $g(x)$ הוא $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$

וטור הפורייה של $h(x)$ הוא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

ב. נתון בנוסף כי $f(x) = e^x$, חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$.

3.

א. תהי $f \in E$ כך ש' f, f רציפות, " f רציפה למקוטעין ו $f(\pi) = f(-\pi)$.
נסמן את מקדמי הפורייה של f ב a_n, b_n .

הוכיחו כי $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n$.

ב. נתון כי טור הפורייה של הפונקציה $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ הוא $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$

חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

4. תהי $f \in G$ רציפה ונגזרתה רציפה למקוטעין כך שגם התמרת הפורייה שלה F מקיימת $F \in G$.
א. הביעו את התמרת הפורייה של F באמצעות f .

ב. נזכור כי התמרת הפורייה של $f = e^{-|x|}$ היא $F(s) = \frac{1}{\pi(1+s^2)}$

חשבו את התמרת הפורייה של $\frac{1}{1+x^2}$.