תרגיל בית 7 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. הסבירו מדוע המשוואה $6 = 2\cdot 3 = \left(1+\sqrt{7}\right)\left(-1+\sqrt{7}\right)$ לא סותרת את העובדה ש-$\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ הוא תחום פריקות יחידה.

שאלה 2. הראו שבפירוקים $\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-6} = -2\cdot 3$ בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ כל הגורמים הם אי פריקים, אינם חברים, ואינם ראשוניים.

שאלה 3. יהי F שדה. הוכיחו שחוג המנה $F[x,y,z]/\left\langle xy - z^2\right\rangle$ אינו תחום פריקות יחידה.

שאלה 4. יהי R חוג. נגדיר עבורו פונקציית נורמת אידאלים לפי $N(0)=0$ ולכל $0 \neq a \in R$, $N(a) = |R/\langle a\rangle|$.

א. הוכיחו שאם R תחום שלמות, אז N היא פונקציה כפלית (בחשבון עוצמות).

ב. מצאו דוגמת נגד לסעיף הקודם כאשר R אינו תחום שלמות. רמז: מספיק לקחת R סופי.

שאלה 5. בתרגיל זה נמצא את כל האיברים הראשוניים של $\mathbb{Z}[i]$. כזכור, $\mathbb{Z}[i]$ הוא אוקלידי ביחס לפונקציית הנורמה המושרית מ-$\mathbb{C}$, ולכן איבר הוא ראשוני אם ורק אם הוא אי-פריק.

א. הוכיחו שאם $2 < p \in \mathbb{Z}$ מספר ראשוני כך ש-$p \equiv 3 \pmod 4$, אז p אי-פריק ב-$\mathbb{Z}[i]$.

ב. הוכיחו כי אם π אי-פריק ב-$\mathbb{Z}[i]$, אז קיים מספר ראשוני $p \in \mathbb{Z}$ כך ש-$p \mid \pi$.

ג. הוכיחו שאם $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ מקיים $N(\alpha)$ מספר ראשוני, אז α אי-פריק.

ד. הוכיחו שאם $p \equiv 1 \pmod 4$ אז קיים $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ אי-פריק שעבורו $N(a+bi) = p$.
(מותר להשתמש בטענה הבאה מתורת המספרים ללא הוכחה: אם $p \equiv 1 \pmod 4$ מספר ראשוני, אז קיים $x \in \mathbb{Z}$ כך ש-$x^2 \equiv -1 \pmod p$.)

ה. הסיקו מיהם כל האיברים הראשוניים ב-$\mathbb{Z}[i]$ עד כדי חברות (אל תשכחו לפרק את האיבר 2!)

שאלה 6. יהי R תחום פריקות יחידה. נגדיר לכל $a \in R\setminus\{0\}$ את $\mu(a)$ להיות מספר הגורמים האי פריקים בפירוק של a ב-R. זה מוגדר היטב מפני ש-R הוא תחום פריקות יחידה.

יהיו $a,b \in R\setminus\{0\}$ כך ש-$a|b$. הוכיחו $\mu(a)\le\mu(b)$ ושיש שיוויון אם ורק אם $a \sim b$. בפרט, a הפיך אם ורק אם $\mu(a)=0$.

שאלה 7. יהי F שדה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $R_n = F\left[x^{1/n!}\right]$. למשל $R_1 = F[x]$ ו-$R_2 = F[x^{1/2}]$. שימו לב שמתקיים

$$R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3 \subseteq \dots$$

(למה? כי בשלב n מוסיפים ל-R_{n-1} איבר t שמקיים $t^n = x^{1/(n-1)!}$), ונסתכל על החוג שהוא האיחוד $R = \bigcup_n R_n$.

א. הוכיחו שלכל $0 < r \in \mathbb{Q}$ מתקיים $x^r \in R$. השתכנעו שאיברי R הם סכומים סופיים מהצורה $\sum a_i x^{r_i}$ עבור $a_i \in F$ ו-$0 < r_i \in \mathbb{Q}$.

ב. הוכיחו כי R אינו תחום אטומי (תחום פריקות). רמז: הראו שאם $y \in R$ הוא מחלק אמיתי של x, אז הוא מן הצורה $\pm x^r$ עבור $0 < r < 1$, ואילו $\pm x^r$ פריק.

ג. הראו שלכל $n, m \in \mathbb{N}$ החוגים R_n, R_m איזומורפיים, אבל R לא איזומורפי אליהם.

שאלה 8. רשות: יהי F שדה. הוכיחו שבחוג $F[x]$ יש אינסוף איברים ראשוניים.
רמז: הוכחה המיוחסת לאוקלידס.

בהצלחה!