

בס"ד

מבחן באלגברה ליניארית תש"ע סמסטר א' 89-112 מועד א 19.2.10

מרצים: ד"ר יונתן בק, פרופ' יובל רויכמן.

משך המבחן: שעתיים

חומר עזר: מחשבון פשוט.

הוראות: יש לענות בפירוט על 3 מתוך 4 שאלות בחלק I, ויש לענות בפירוט על 1 מתוך 2 בחלק II. התשובות צריכות לכלול הנמקות והוכחות מלאות.

כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, ולא יבדקו.

יש לרשום תשובות מנומקות.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

חלק I בחר 3 מתוך 4

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

חלק II בחר 1 מתוך 2

שאלה	ציון
5	
6	

ציון:

בהצלחה!

כתוב תשובתך בפירוט בדפים 2 ו 3

שאלה 1

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} ax_1 + ax_2 - ax_3 = a \\ -x_1 + 4x_2 - ax_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

- (i) עבור אילו ערכי a יש למערכת יותר מפתרון אחד.
(ii) עבור כל ערך של a שמצאת בסעיף א הצג את הפתרון הכללי.
(iii) נתון בנוסף שמערכת המשוואות הנתונה היא מעל השדה ϕ_p (p מספר ראשוני) רשום את מספר הפתרונות של מערכת המשוואות באמצעות p עבור כל ערך של a שמצאת בסעיף הקודם.

כתוב תשובתך בפירוט בדפים 4 ו 5
שאלה 2

נסתכל במערכת הבאה:

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

(i) הבע את המערכת בצורה $Ax = b$, עבור מטריצה A ושני וקטורים x ו b .

(ii) מצא את המטריצה A^{-1} המטריצה ההופכית למטריצה A .

(iii) ע"י שימוש ב- A^{-1} מצא וקטור פתרון מסויים $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ למערכת $Ay = b$.

(iv) תהי A' המטריצה המתקבלת מ A על ידי הוספת עמודה נוספת הזזה לוקטור b . מה הדרגה של A' ?

(v) האם העמודות של A' הן בלתי תלויות ליניאריות?

כתוב תשובתך בפירוט בדפים 6 ו 7
שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . נתון ש $\dim V = 5$. נתונים U ו W תתי-מרחב מממד 3 של V .
נתון ש $\dim(U + W) = 4$.

(i) מצא/י את $\dim(U \cap W)$.

(ii) יהי $F = \mathbb{C}$ השדה עם שלושה איברים. כמה בסיסים שונים יש ל $U \cap W$ מעל F .

כתוב תשובתך בפירוט בדפים 10 ו 11
שאלה 4

(i) הגדר מטריצה אלמנטרית $n \times n$.

(ii) המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ היא מטריצה הפיכה. כתוב את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

כתוב תשובתך לאחת מהשאלות הבאות בפירוט בדפים 10 ו 11

שאלה 5

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . הוכח את המשפט הבא:

תהי $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{K}, \mathbf{w}_m\} \subseteq V$ קבוצה הפורשת המרחב הוקטורי V . הוכח/י שיש ל S תת-קבוצה $T = \{\mathbf{w}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_2}, \mathbf{K}, \mathbf{w}_{i_n}\}$ כך ש $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m$, היא מהווה בסיס ל V .

שאלה 6

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . הוכח את המשפט הבא:

יהי W תת-מרחב של V . תהי $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{K}, \mathbf{w}_l\} \subset W$ תת-קבוצה בלתי תלויה ליניארית ב W . הוכח שניתן להשלים את T לבסיס של W .

