

תרגיל בית 11 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חזרה, ממבחן). רשמו את כל תת-השדות של $\mathbb{Q}(\rho_7)$ (תנו יוצרים לכל תת-שדה).

שאלה 2. מצאו שדות ביניים של ההרחבה $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}, \sqrt[5]{2}]/\mathbb{Q}$ כך שהרחבות הביניים הן רדיקליות.

שאלה 3. יהי שדה F המכיל את שורשי היחידה (לפחות) עד סדר n . הוכיחו כי פולינום $f(x) \in F[x]$ ניתן לפתרון על ידי רדיקלים מעל F אם ורק אם $f(x^n)$ ניתן לפתרון על ידי רדיקלים מעל F .

שאלה 4. בדקו האם הפולינומים הבאים ניתנים לפתרון על ידי רדיקלים:

א. $f(x) = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$

ב. $g(x) = x^6 + 2x^3 + 6i \in \mathbb{Q}[i][x]$

ג. $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ עם שדה פיצול K כך ש- $[K : \mathbb{Q}] = 26$.
רשות: מה אם $[K : \mathbb{Q}] = 88311$?

שאלה 5. הגיעו לפחות עד שלב 8 במשחק **Euclid: The Game**.

שאלה 6. הוכיחו כי ניתן לבנות מצולע משוכלל עם n צלעות אם ורק אם המספר $\cos \frac{2\pi}{n}$ בר-בנייה. רמז שהוא כמעט פתרון: מצולע משוכלל החסום במעגל היחידה.

שאלה 7. תהי E/F הרחבת גלואה שהיא ריבועית חוזרת, ויהי שדה ביניים K . הוכיחו כי גם K/F ריבועית חוזרת.

שאלה 8. בדקו האם ניתן לבנות את המספרים הבאים בעזרת סרגל ומחוגה.

א. $e^{2\pi i/15}$

ב. $\sqrt[5]{3}$

ג. $\sqrt[n]{2}$ כתלות ב- $n \in \mathbb{N}$.

שאלה 9. האם ניתן לחלק זווית לחמש בעזרת סרגל ומחוגה?

שאלה 10 (העשרה). קראו על **בניות מפתיעות עם סרגל ומחוגה** מאת מוטי בן-ארי (או באנגלית). שימו לב שתורת גלואה לא מוזכרת שם.

בהצלחה!