

הצעה לפתרון (חלקי) – בדידה למדעי המחשב תשע"ז מועד ב'

עדי מכנס

1. [13 נק'] תהא U קבוצה ו $A \subseteq U$ תת קבוצה שלה. נגדיר סדרת קבוצות בצורה רקורסיבית:

$$\begin{aligned} A_0 &= A \\ \forall n \in \mathbb{N}: A_n &= A_{n-1}^c \cup A \end{aligned}$$

הוכיחו שלכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} A_{2m} &= A \\ A_{2m-1} &= U \end{aligned}$$

פתרון:

נוכיח את הטענה הראשונה עבור הזוגיים באינדוקציה על m .

בסיס: אכן עבור $m = 0$ מתקיים כי $A_0 = A$ לפי הנתון.

צעד: יהי m עבורו $A_{2m} = A$. נוכיח כי עבור $A_{2(m+1)}$ מתקיים כי

$$A_{2m+2} = A$$

אבל לפי נוסחת הנסיגה, זה שווה ל:

$$A_{2m+2} = A \cup A_{2m+1}^c = A \cup (A \cup A_{2m}^c)^c = A \cup (A^c \cap A_{2m})$$

אבל מהנחת האינדוקציה:

$$= A \cup (A^c \cap A_{2m}) = A \cup \emptyset = A$$

משל ■.

כעת נוכיח את הטענה השנייה (על האי זוגיים) באינדוקציה על m .

בסיס: אכן, עבור $m = 1$ מתקיים כי:

$$A_1 = A_0^c \cup A = A^c \cup A = U$$

צעד: יהי m עבורו $A_{2m-1} = U$. צ"ל כי עבור A_{2m+1} הטענה מתקיימת גם כן. לפי הגדרת הקבוצות, מתקיים כי:

$$A_{2m+1} = A \cup (A_{2m})^c$$

אבל לפי הטענה הקודמת יותר, מתקיים כי:

$$= A \cup A^c = U$$

משל ■.

2. [7 נק' לסעיף] הוכיחו/הפריכו:

א. יהיו p, q פסוקים לוגיים. אזי הפסוק $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ הוא טאוטולוגיה.

פתרון:
הוכחה
נעשה טבלת אמת:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

ואכן קל לראות כי פסוק זה הינו טאוטולוגיה.
משל ■

ב. יהיו A_1, A_2, A_3 קבוצות קבוצות. אזי $P(A_1 \triangle A_2 \triangle A_3) = P(A_1) \triangle P(A_2) \triangle P(A_3)$.

פתרון:
הפרכה
נביט בקבוצות הבאות:
$$A_1 = A_2 = A_3 = \{17\}$$
לכן:
$$P(A_1 \triangle A_2 \triangle A_3) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$
אבל:
$$P(A_1) \triangle P(A_2) \triangle P(A_3) = \emptyset$$
משום שכלל הקבוצות שוות.

ג. תהא $f: X \rightarrow X$ פונקציה ותהא $A \subseteq X$ תת קבוצה. אזי $f[f^{-1}[A]] = A$ (שימו לב שהסוגריים המרובעות בשאלה זו מסמנות תמונה ותמונה הפיכה של f).

פתרון:
הפרכה
נביט ב $X = \mathbb{R}$ ובפונקציה הקבועה:
$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = 17$$
כמו כן, נביט ב $A = \{42\}$. לכן:
$$f^{-1}[A] = \emptyset$$

ולכן

$$f[f^{-1}[A]] = f[\emptyset] = \emptyset \neq A$$

3. [8 נק' לסעיף] תהא $X = \mathbb{R}$ ונגדיר יחס $\sim$ על X כך – לכל $f, g \in X$:
 $f \sim g \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad f(x) = g(x) + a$
א. הוכיחו כי $\sim$ יחס שקילות.

פתרון:

רפלקסיביות: תהי $f \in X$ וצ"ל $f \sim f$. אכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) = f(x) + 0$ (נבחר $a = 0$).
סימטריות: תהיינה $f, g \in X$ ונניח כי $f \sim g$. צ"ל $g \sim f$. לכן קיים a' עבורו:

$$f(x) = g(x) + a'$$

לכל x . ולכן:

$$g(x) = f(x) - a'$$

ולכן אם נבחר $a = -a'$ נקבל הדרוש.

טרנזיטיביות: תהיינה $f, g, h \in X$ כך ש $f \sim g \wedge g \sim h$. נוכיח כי $f \sim h$. קיימים a_1, a_2 כך ש:

$$f(x) = g(x) + a_1$$

$$h(x) = g(x) + a_2$$

לכן:

$$g(x) = f(x) - a_1$$

ונציב את הנ"ל בנתון השני ונקבל:

$$h(x) = f(x) - a_1 + a_2$$

ולכן אם נבחר $a = a_2 - a_1$ נקבל הדרוש.

■ משל

ב. הפריכו את הטענה: תהא $f \in X$. אזי $f = f \circ f \Leftrightarrow [f]_{\sim} = [f \circ f]$.

פתרון:

נביט בפונקציה:

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

קל לראות כי:

$$f(f(x)) = 1$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ שכן $0, 1 \in \mathbb{Q}$. אבל עבור $x = \sqrt{2}$ מתקיים כי:

$$f(f(x)) = f(x) = 1$$

וכן עבור $x = \sqrt{17}$ מתקיים כי:

$$1 = f(f(x)) \neq f(x) = 0$$

ולכן לא קיים a עבורו $f(x) = f(f(x)) + a$ [שכן אחרת הוא היה גם 1 וגם 0, בסתירה].

ג. תהא $f \in X$. מצאו את עוצמת מחלקת השקילות של f . כלומר מצאו $|[f]_{\sim}|$.

פתרון:

נגדיר פונקציה:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow [f]_{\sim}$$

ע"י: לכל $a \in \mathbb{R}$ נגדיר פונקציה: לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$h(a)(x) = f(x) + a$$

ברור כי $h(a)$ מוגדרת היטב. כי h חח"ע ועל.

חח"ע: יהיו $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ כך ש $h(a_1) = h(a_2)$. צ"ל $a_1 = a_2$. לכן, לכל x ממשי מתקיים:

$$f(x) + a_1 = f(x) + a_2$$

ולכן אכן $a_1 = a_2$ כפי שרצינו.

על: תהי $g \in [f]_{\sim}$. נמצא a כך ש $g = h(a)$. כיוון ש $g \in [f]_{\sim}$, קיים $a' \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$g(x) = f(x) + a'$$

לכן נבחר $a = a'$ ולכן לכל x :

$$h(a')(x) = f(x) + a' = g(x)$$

לכן כיוון שמצאנו פונקציה הפיכה מ $\mathbb{R}$ אל $[f]_{\sim}$, מתקיים כי:

$$|[f]_{\sim}| = |\mathbb{R}| = \aleph$$

ד. מצאו את עוצמת קבוצת המנה $X/\sim$.

פתרון:

ראשית נמצא חסם תחתון לעוצמה.

נגדיר:

$$h: \mathbb{R}^{(-\infty, 42)} \rightarrow X/\sim$$

ע"י: לכל $f \in \mathbb{R}^{(-\infty, 42)}$ נגדיר:

$$h(f) = \left[\begin{cases} x & x \geq 42 \\ f(x) & x < 42 \end{cases} \right]_{\sim}$$

(בעברית מדוברת: מחלקת השקילות של הפונקציה המפוצלת לעיל).

קל לראות כי אכן פונקציה מוגדרת היטב (לכל פונקציה יש רק מחלקת שקילות אחת בה היא נמצאת – במחלקת השקילות שלה עצמה!). נוכיח כי h חח"ע.

תהיינה $f_1, f_2 \in X$ כך ש $h(f_1) = h(f_2)$. צ"ל $f_1 = f_2$. לכן:

$$\left[\begin{cases} x & x \geq 42 \\ f_1(x) & x < 42 \end{cases} \right]_{\sim} = \left[\begin{cases} x & x \geq 42 \\ f_2(x) & x < 42 \end{cases} \right]_{\sim}$$

לכן מתקיים כי $\left(\begin{cases} x & x \geq 42 \\ f_1(x) & x < 42 \end{cases} \right) \sim \left(\begin{cases} x & x \geq 42 \\ f_2(x) & x < 42 \end{cases} \right)$. כלומר, קיים $a \in \mathbb{R}$ עבורו לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & x \geq 42 \\ f_1(x) & x < 42 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 42 \\ f_2(x) & x < 42 \end{cases} + a$$

בפרט עבור $x = 42$ מתקיים כי:

$$42 = 42 + a$$

ולכן המספר הממשי היחיד שמקיים את הנ"ל הוא עבור $a = 0$, כלומר כאשר מתקיים:

$$\begin{cases} x & x \geq 42 \\ f_1(x) & x < 42 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 42 \\ f_2(x) & x < 42 \end{cases}$$

כעת נוכיח את שוויון הפונקציות המבוקשות.

תחום וטווח – מיידי.

נוסחה – יהי $x \in \mathbb{R}$, $42 > x$. לכן ממה שפיתחנו לעיל מתקיים כי $f_1(x) = f_2(x)$ כפי שרצינו.

לכן, לאחר כל האיפנוג הזה מתקיים כי:

$$2^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = \aleph^{\aleph} = |\mathbb{R}^{(-\infty, 42)}| \leq |X/\sim|$$

מעיקרון הכפל.

כעת נמצא חסם עליון לעוצמה. נביט בפונקציה:

$$h: X \rightarrow X/\sim$$

ע"י: לכל $f \in X$ $h(f) = [f]_{\sim}$. נוכיח כי פונקציה על:

תהי $S \in X/\sim$. לכן קיימת פונקציה f כך ש $S = [f]_{\sim}$ (שכן זוהי ההגדרה של קבוצת המנה) ולכן נבחר את המקור להיות f וסיימנו.

מה היופי? $X/\sim$ אינה ריקה (עובדה ידועה), וכן X אינה ריקה. לכן קיימת פונקציה $g: X/\sim \rightarrow X$ חח"ע.

לכן:

$$|X/\sim| \leq |X| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$$

(כפי שהוכחנו לפני כן).

סה"כ לפי ק.ש.ב מתקיים כי:

$$|X/\sim| = 2^{\aleph}$$

4. [8 נק' לסעיף] תהא $(A, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית.

לכל $x \in A$ נגדיר $B_x = \{y \in A : x \leq y\}$.

בעברית מדוברת, B_x היא אוסף כל האיברים שגדולים או שווים ל x .

א. נניח כי ב A אין איבר גדול ביותר. הוכיחו: $\bigcap_{x \in A} B_x = \emptyset$.

פתרון: נב"ש כי קיים $a \in \bigcap_{x \in A} B_x$. נראה כי a גדול ביותר:

יהי $x \in A$. לכן $a \in B_x$ (כיוון שהוא בחיתוך הכללי). ולכן $x \leq a$.

הוכחנו כי a גדול ביותר ב A , בסתירה לנתון.

משל ■

ב. הוכיחו כי $|\bigcap_{x \in A} B_x| = 1 \Leftrightarrow$ קיים איבר גדול ביותר ב A .

פתרון:

נוכיח את שתי הגרירות.

$\Leftarrow$ נניח כי $|\bigcap_{x \in A} B_x| = 1$ ויש להוכיח שקיים איבר גדול ביותר ב A . לכן קיים איבר בחיתוך הכללי, אך הוכחנו בסעיף א' שהוא אכן גדול ביותר.

$\Rightarrow$ נניח כי קיים איבר גדול ביותר ב A . נוכיח כי $|\bigcap_{x \in A} B_x| = 1$.

נסמן את האיבר הגדול ביותר ב a . לכן לכל $x \in A$ מתקיים כי $x \leq a$. לכן $a \in B_x$ (לכל x), ולכן בוודאי שיהיה בחיתוך הכללי.

עד כה, הוכחנו כי $|\bigcap_{x \in A} B_x| \geq 1$. נוכיח כי $|\bigcap_{x \in A} B_x| \leq 1$. נב"ש כי $|\bigcap_{x \in A} B_x| > 1$. לכן קיימים a, b שונים כך ששניהם בחיתוך הכללי. אבל לפי מה שהוכחנו בסעיף א', מתקיים כי a, b גדולים ביותר, בסתירה – משום שאיבר גדול ביותר יחיד.

לכן בהכרח קיים איבר בחיתוך הכללי ויחיד (שהוא בעצם האיבר הגדול ביותר).

משל ■

ג. תנו דוגמה לקס"ח $(A, \leq)$ ואיברים $x_1, x_2 \in A$ כך ש $B_{x_1} \cap B_{x_2} \neq \emptyset$ אבל לא קיים

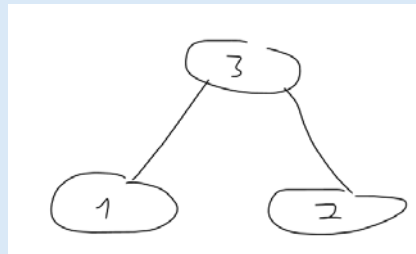
$\inf(B_{x_1} \cap B_{x_2})$ (הקבוצות B_{x_1}, B_{x_2} הוגדרו בראש התרגיל).

פתרון:

נביט ב $A = \{1,2,3\}$ וביחס הסדר החלקי:

$$\leq := \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (2,3)\}$$

ולהלן המחשה יפה שלו:



(קל מאוד לוודא כי הנ"ל יחס סדר חלקי)

נביט ב:

$$B_1 = \{3\}$$

$$B_2 = \{3\}$$

ואכן:

$$B_1 \cap B_2 = \{3\} \neq \emptyset$$

אבל לא קיים $\inf\{3\}$. שכן, אכן $1 \leq 3, 2 \leq 3$ אך לא ניתן לקבוע מי הגדול מבין 1,2.