פתרון תרגיל 2 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה $z=0$ ומצאו אותו אם הוא קיים:

(א) $\frac{\overline{z}}{z}-\frac{z}{\overline{z}}$

$$\frac{\overline{z}}{z}-\frac{z}{\overline{z}}=\frac{\overline{z}^2-z^2}{z\overline{z}}=\frac{x^2-2ixy-y^2-(x^2+2ixy-y^2)}{x^2+y^2}=-i\frac{4xy}{x^2+y^2}$$

לפי כלים של אינפי 3, זה לא מתכנס (למשל מתקדמים לאורך $y=0$ ולאורך $x=y$)

(ב) $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\overline{z}}$

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\overline{z}}=\frac{y}{x-iy}=\frac{xy+iy^2}{x^2+y^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}+i\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

החלק הממשי והמדומה מתבדרים ולכן הגבול לא קיים.

2. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות/אנליטיות:

(א) $f(z)=x^3+iy^3$

(ב) $f(z)=z+\operatorname{Re}(z)$

(ג) $f(z)=x^3+y^5$

3. מצאו את כל הנקודות $z\in\mathbb{C}$ שבהן $f(z)=\overline{z}e^{-17z^2}$ גזירה.
פתרון: נניח ש $f(z)$ גזירה בנקודה z_0 כלשהיא. נשים לב שהפונקציה e^{17z^2} גזירה בכל נקודה ולכן גם ב z_0 ולכן הפונקציה $\overline{z}=f(z)\cdot e^{17z^2}$ גזירה גם כן ב z_0, אבל ידוע ש $\overline{z}$ אינה גזירה באף נקודה. לכן גם $f(z)$ אינה גזירה באף נקודה.

4. תהי $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ לפי

$$f(z)=u(x+y)-iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x).
פתרון: נסמן $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ כלומר

$$U(x,y)=u(x+y),\quad V(x,y)=-u(x-y)$$

היות ש u גזירה ברציפות, נקבל שהנגזרות U_x,U_y,V_x,V_y קיימות ורציפות ולכן U,V דיפרנציאביליות בכל נקודה ובפרט על הציר הממשי. נותר לבדוק את קיום משוואות קושי רימן

$$U_x(x,y)=u'(x+y),\quad U_y(x,y)=u'(x+y)$$

$$V_x(x,y) = -u'(x-y) \quad V_y(x,y) = u'(x-y)$$

לכן

$$U_x(x,0) = u'(x) = V_y(x,0), \quad U_y(x,0) = u'(x) = -V_x(x,0)$$

כנדרש ולכן f גזירה על ציר x.

5. מצאו פונקציה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$.
פתרון: אם משוואות קושי רימן ייצאו לנו

$$x^2 + y^2 = 2 \quad x^2 = y^2$$

אז קל לראות שהנקודות שבהן הפונקציה גזירה הן רק הנקודות הרצויות. צריך למצוא פונקציה שאלו משוואות קושי רימן שלה.
נכתוב את המשוואות בתור

$$x^2 = 2 - y^2 \quad x^2 = y^2$$

נחליט ש $u_x = x^2$ ולכן $u = \frac{1}{3}x^3 + C(y)$ כאשר $C(y)$ היא פונקציה שתלויה רק ב y. כמו כן נחליט ש $u_y = y^2$ ולכן $u = \frac{1}{3}y^3 + C(x)$ כלומר בינתיים נראה שאפשר לקחת

$$u(x,y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2$$

בהתאמה נקבל לפי משוואות קושי רימן

$$v_y = 2 - y^2 \quad v_x = -x^2$$

ולכן

$$v(x,y) = 2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3$$

כלומר הפונקציה

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + i(2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3)$$

מתאימה לדרישות.

6. תהי $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.
פתרון: אם נסמן

$$g(z) = (f(z))^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$$

היות ש $\mathrm{Re}(g)$ היא פונקציה קבועה, ו $g(z)$ גזירה, נקבל ש $g(z)$ קבועה. כלומר $(f(z))^2 = D$ קבוע. אם במקרה $D = 0$ סיימנו. אם לא, נסמן את שני השורשים של D בתור d_1, d_2, זה מחייב שלכל ערך z

$$f(z) \in \{d_1, d_2\}$$

נותר להוכיח ש f שווה רק לאד משני הערכים האלה. נזכור ש $f(z)$ גזירה ולכן בוודאי רציפה. נניח בשלילה שקיימים z_1, z_2 כך ש $f(z_i) = d_i$. נבחר מסילה $\gamma(t)$ כלשהיא בין z_1 ל z_2. לפי משפט ערך הביניים תמונתה תחת f היא מסילה בין d_1, d_2 אבל מצד שני $f(\gamma(t)) \subseteq \{d_1, d_2\}$ בסתירה. ולכן לכל z מתקיים $f(z) = d_1$ או $f(z) = d_2$ כלומר f קבועה כנדרש.

7. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z \mid |z| < R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\overline{z})}$ גזירה שם.
פתרון: ראשית נשים לב ש $\overline{f(\overline{z})}$ מוגדרת בתחום המדובר כי $z \in \{z \mid |z| < R\} \Leftrightarrow \overline{z} \in \{z \mid |z| < R\}$. אם נכתוב

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\overline{f(\overline{z})} = U(x, y) + iV(x, y)$$

אז בעצם

$$U(x, y) = u(x, -y) \quad V(x, y) = -v(x, -y)$$

ולכן U, V בוודאי דיפרנציאביליות כנדרש ובנוסף

$$U_x(x, y) = u_x(x, -y) = v_y(x, -y) = V_y(x, y)$$

$$U_y(x, y) = -u_y(x, -y) = v_x(x, -y) = -V_x(x, y)$$

כלומר משוואות קושי רימן מתקיימות כנדרש.