# פיתרון לתרגיל מספר 4

**<u>שאלה 1:</u>**

א. (עם החזרה)

| $P(X=k)$ | **k** |
|---|---|
| $\left(\frac{20}{30}\right)^2$ | 0 |
| $2\frac{10}{30}\frac{20}{30}$ | 1 |
| $\left(\frac{10}{30}\right)^2$ | 2 |

$$E[X^2]=2\frac{10}{30}\frac{20}{30}\cdot 1^2+\left(\frac{10}{30}\right)^2\cdot 2^2=\frac{8}{9}\quad E[X]=2\frac{10}{30}\frac{20}{30}\cdot 1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 2=\frac{2}{3}\quad ,$$

$$Var[X]=\frac{8}{9}-\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{8}{81}$$

ב. (בלי החזרה)

| $P(X=k)$ | **k** |
|---|---|
| $\frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}$ | 0 |
| $2\cdot\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}$ | 1 |
| $\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}$ | 2 |

$$E[X^2]=2\cdot\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot 1^2+\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot 2^2=\frac{76}{87}\quad E[X]=2\cdot\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot 1+\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot 2=\frac{2}{3}\quad ,$$

$$Var[X]=\frac{76}{87}-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

שימו לב . התוחלת זהה בשני הסעיפים, השונות משתנה במקרה של הוצאה עם או בלי החזרה.

## **תשובה 2:**

| Y\X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 11/36 |
| 2 | 0 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 9/36 |
| 3 | 0 | 0 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 7/36 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 5/36 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 1/18 | 3/36 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 1/36 |
| | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 | |

ב. ניתן לחשב עבור כל משבצת את הערך של המשתנה המקרי X+Y, להכפיל בהסתברויות ולחבר, וניתן להשתמש גם בלינאריות של התוחלת E(X+Y) = E(X) + E(Y), ולחשב את התוחלות לפי ההתפלגויות השוליות:

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}=4.472$$
$$E(Y)=1\cdot\frac{11}{36}+2\cdot\frac{9}{36}+3\cdot\frac{7}{36}+4\cdot\frac{5}{36}+5\cdot\frac{3}{36}+6\cdot\frac{1}{36}=\frac{91}{36}=2.572$$
$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=4.472+2.572=7.044$$

## **תשובה 3:**

נסמן ב- X (משתנה מקרי) את מספר זוגות הכרטיסים שישארו בקופסא.

נגדיר משתנה מיקרי $X_k$ עבור $k=1,\dots,N$ באופן הבא: $X_k=1$ אם הזוג שכתוב עליו $k$ נשאר בקופסא, אחרת $X_k=0$ . מכאן רואים שמתקיים $X=\sum_{k=1}^{N}X_k$ . עתה,

$$E(X_k)=1\cdot P(X_k=1)+0\cdot P(X_k=0)=P(X_k=1)=\binom{2N-2}{m}/\binom{2N}{m}$$

במונה : מספר האפשרויות לבחירת $m$ כרטיסים מ- 2N הכרטיסים שבקופסא למעט 2 הכרטיסים שרשום עליהם $k$ .

לבסוף $$E(X)=\sum_{k=1}^{N}E(X_k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}=N\cdot\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}=\frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2(2N-1)}$$

**תשובה 4:**

נגדיר מ"מ $X$ = מספר החלפות הסימן מ- $X_0$ עד ל- $X_n$ אזי $X_n = (-1)^X$. . $X$ מתפלג בינומית באופן הבא: $X \sim Bin(n, 1-p)$ כש $P(X=k) = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$.

הערכים האפשריים עבור $X_n$ הם $\{1,-1\}$ לכן צריך למצוא את $P(X_n=-1), P(X_n = 1)$ . נשים לב ש $P(X_n=-1) = P(\text{X אי זוגי})$, $P(X_n = 1) = P(\text{X זוגי})$ לכן התוחלת של $X_n$ היא:

$E(X_n) = 1 \cdot P(\text{X זוגי}) + (-1) \cdot P(\text{X אי זוגי}) = P(\text{X זוגי}) - P(\text{X אי זוגי})$

כמו כן

$E(X_n) = E((-1)^X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k} =$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(p-1)^k p^{n-k} = (2p-1)^n$

שימו לב : במעבר הלפני אחרון $(-1)^k(1-p)^k = (p-1)^k$ ובמעבר האחרון , לפי נוסחאת הבינום $(2p-1)^n = \big((p-1)+p\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(p-1)^k p^{n-k}$.

לכן $P(\text{X זוגי}) - P(\text{X אי זוגי}) = (2p-1)^n$ אבל גם $P(\text{X זוגי}) + P(\text{X אי זוגי}) = 1$

ולפי 2 המשוואות הנ"ל נקבל ש :

$$P(X_n = 1) = P(X = \text{זוגי}) = \frac{1+(2p-1)^n}{2}$$

$$P(X_n = -1) = 1 - P(X_n = 1) = \frac{1-(2p-1)^n}{2}$$

**תשובה 5:**

עשינו שאלה דומה בכיתה:

$$P(X=0 \mid X+Y=3) = \frac{\binom{10}{0}q^{10}\binom{5}{3}p^3q^2}{\binom{15}{3}p^3q^{12}} = \frac{\binom{10}{0}\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}$$

$$P(X=1 \mid X+Y=3) = \frac{\binom{10}{1}pq^{9}\binom{5}{2}p^2q^3}{\binom{15}{3}p^3q^{12}} = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{2}}{\binom{15}{3}}$$

באופן דומה ניתן לחשב את ההסתברויות ש $X$ מקבל את הערכים 2 ו 3.

באופן כללי:

$$P(X=x\mid X+Y=3)=\frac{\binom{10}{x}p^{x}q^{10-x}\binom{5}{3-x}p^{3-x}q^{5-(3-x)}}{\binom{15}{3}p^{3}q^{12}}=\frac{\binom{10}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{15}{3}}$$

**<u>תשובה 6:</u>**

א. X מתפלג בינומית $X\sim Bin(n,0.5)$ לכן
$E(X)=n\cdot 0.5\,, Var(X)=n\cdot 0.5\cdot(1-0.5)=n\cdot 0.25$ .
Y הינו בסיכוי 0.5 מספר הראשים שמתפלג $Bin(n,0.5)$ ובסיכוי 0.5 מספר הזנבות שמתפלג $Bin(n,0.5)$ לכן Y מתפלג בינומית $\sim Bin(n,0.5)$ .

ב. נמצא את התוחלת של המשתנה המקרי $XY$ בהסתברות 0.5 הוא $X^2$ שכן בהסתברות 0.5 $\mathrm{X}=\mathrm{Y}$ ובהסתברות 0.5 הוא $X(n-X)$ לכן מתכונת הלינארית של התוחלת מקבלים שתוחלתו : $E(XY)=0.5\cdot E(X^2)+\ 0.5\cdot E(nX-X^2)=0.5\cdot n\cdot E(X)$ . מכאן נקבל ש $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.5\cdot n\cdot E(X)-E(X)^2=0$ .

ג. עבור $n>1$ אם $\mathrm{X}=0$ אזי $Y$ לא יכול לקבל ערך השונה מאפס או $n$. לכן עבור כל ערכי הביניים של Y ההסתברות המשותפת היא 0 למרות שכ"א מההסתברויות השוליות שונה מאפס.

עבור $n=1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Y=0 | Y=1 | |
| X=0 | 0.25 | 0.25 | 0.5 |
| X=1 | 0.25 | 0.25 | 0.5 |
| | 0.5 | 0.5 | |

לכן במקרה זה הם בלתי תלויים.