ב"ש אנליזה 2 תשפב מועד ב

1. חשבו את:

(א) $\int xe^{\left(x^2\right)}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בשיטת ההצבה:

$$\int xe^{\left(x^2\right)}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c} t=x^2 \\ \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int e^t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{\left(x^2\right)}+C$$

(ב) $\int x^2\ln(x)\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

נתחיל בחישוב עזר

$$\begin{aligned}\int x^2\ln(x)\mathrm{d}x&=\left\{\begin{array}{ccc} f=\ln(x) & \Rightarrow & f'=\frac{1}{x} \\ g'=x^2 & & g=\frac{x^3}{3}\end{array}\right\}=\\ &=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\int\frac{x^2}{3}\mathrm{d}x\\ &=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C\end{aligned}$$

2. יהא a פרמטר ממשי ונביט בפונקציה $f(x)=\frac{x^2-2x-a}{e^{-x}}$.

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה f.

פתרון: הפונקציה היא

$$f(x)=\frac{x^2-2x-a}{e^{-x}}=\left(x^2-2x-a\right)e^x$$

והיא מוגדרת לכל x.

(ב) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר יש לפונקציה שתי נקודות קיצון.

פתרון: נגזור את הפונקציה

$$f'(x)=(2x-2)\,e^x+\left(x^2-2x-a\right)e^x=\left(x^2-2-a\right)e^x$$

בנקודות קיצון מתקיים כי $f'=0$. אצלנו זה שקול למשוואה $x^2-2-a=0$. או באופן שקול

$$x^2=a+2$$

ועל מנת שיהיו שתי פתרונות צריך ש $a+2>0$ (ואז הפתרונות הן $\pm\sqrt{a+2}$). נוודא שאכן במקרה זה אלו שתי נקודות קיצון (ולא נקודות פיתול למשל). נגזור שוב

$$f''(x) = 2xe^x + \left(x^2-2-a\right)e^x = \left(x^2+2x-2-a\right)e^x$$

והצבה של הנקודות תתן את הערכים

$$f''\left(\pm\sqrt{a+2}\right) = \pm 2\sqrt{a+2}\cdot e^{\pm\sqrt{a+2}}$$

ונקבל שעבור $\sqrt{a+2}$ מתקיים $f''>0$ ולכן זוהי נקודת מיני' ועבור $-\sqrt{a+2}$ מתקיים $f''<0$ ולכן זוהי נקודת מקס'.

(ג) נתון כי לפונקציה ישנן שתי נקודות קיצון, והעבירו דרכן ישרים המאונכים לציר x. המרחק בין שני הישרים הוא 6. מצאו את הערך של הפרמטר a.

פתרון: לפי החישובים ממקודם, זה אומר שמתקיים

$$\sqrt{a+2} - \left(-\sqrt{a+2}\right) = 6$$

או $2\sqrt{a+2}=6$. נחלק ב 2 ונעלה בריבוע לקבל

$$a+2=9$$

ונסיק $a=7$.

הציבו את ערך הפרמטר a שמצאתם בסעיף ג', והמשיכו לסעיפים הבאים:

(ד) מצאו את סוגי נקודות הקיצון של הפונקציה f.

פתרון: כמו שחישבו קודם, הנקודה

$$\sqrt{a+2} = \sqrt{7+2} = 3$$

היא נקודת מיני. והנקודה

$$-\sqrt{a+2} = -\sqrt{7+2} = -3$$

היא נקודת מקס'.

(ה) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרון: הפונקציה לאחר הצבת a היא

$$f(x) = \left(x^2-2x-7\right)e^x$$

ולכן

$$f(0) = -7$$

ונקבל ש $(0,-7)$ נקודת חיתוך עם ציר y. חיתוך עם ציר x מתקבל מפתרון המשוואה

$$\left(x^2-2x-7\right)e^x = 0$$

או

$$\left(x^2-2x-7\right)=0$$

שפתרונן הן

$$\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot(-7)}}{2}=1\pm\sqrt{1-1\cdot(-7)}=1\pm\sqrt{8}$$

לכן $\left(1-\sqrt{8},0\right),\left(1+\sqrt{8},0\right)$ נקודות חיתוך עם ציר x.

(ו) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה f.
פתרון: את הציור נשאיר לקורא. רק נשלים את הגבולות ב $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-2x-7\right)e^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}\right)x^2e^x=1\cdot\infty=\infty$$

$$\lim_{x\to(-\infty)}f(x)=\lim_{x\to(-\infty)}\left(x^2-2x-7\right)e^x=\lim_{x\to(-\infty)}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}\right)x^2e^x=\{1\cdot 0\}=0$$

כאשר השיוון האחרון מתבסס על

$$\lim_{x\to(-\infty)}x^2e^x=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x^2}{e^{-x}}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to(-\infty)}\frac{2x}{-e^{-x}}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to(-\infty)}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

(ז) מצאו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה x, בתחום שבין הישרים $x=-5$ וציר ה y.
פתרון: הנגזרת היא

$$f'(x)=\left(x^2-9\right)e^x$$

וראינו שבנקודה -3 היא מתאפס (גם 3 אבל זה לא בתחום הרלוונטי שלנו $[-5,0]$). בתחום $[-5,-3]$ הפונקציה $f'\geq 0$ (על ידי הצבה של ערך שרירותי) ובתחום $[-3,0]$ הפונקציה $f'<0$. לכן נדרש לחשב

$$\int_{-5}^{-3}f'(x)\mathrm{d}x-\int_{-3}^{0}f'(x)\mathrm{d}x$$

נחשב תחילה את הקדומה $\int f'(x)\mathrm{d}x$. נשתמש באינטגרציה בחלקים:
נתחיל

$$\begin{aligned}\int xe^x\mathrm{d}x&=\left\{\begin{array}{ccc}f=x&\Rightarrow&f'=1\\g'=e^x&&g=e^x\end{array}\right\}=\\&=xe^x-\int e^x\mathrm{d}t\\&=xe^x-e^x+C\end{aligned}$$

ואחכ

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{ccc} f=x^2 & \Rightarrow & f'=2x \\ g'=e^x & & g=e^x\end{array}\right\} = \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x\mathrm{d}t \\ &= x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\int f'(x)\mathrm{d}x &= \int \left(x^2-9\right)e^x\mathrm{d}x \\ &= x^2e^x - 2\left(xe^x-e^x\right) - 9e^x + C \\ &= e^x\left(x^2-2x-7\right) + C\end{aligned}$$

כעת התשובה הסופית היא

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{-3} f'(x)\mathrm{d}x - \int_{-3}^{0} f'(x)\mathrm{d}x &= \left[e^x\left(x^2-2x-7\right)\right]\Big|_{-5}^{-3} - \left[e^x\left(x^2-2x-7\right)\right]\Big|_{-3}^{0} \\ &= \left[8\cdot e^{-3} - 28\cdot e^{-5}\right] - \left[-7 - 8\cdot e^{-3}\right] \\ &= 16\cdot e^{-3} - 28\cdot e^{-5} + 7\end{aligned}$$

.3

(א) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס

$$.\int_1^\infty \frac{1+x}{e^x+x}\mathrm{d}x$$

פתרון: נשווה לפונקציה $\frac{2x}{e^x} = \frac{x+x}{e^x} = \frac{1+x}{e^x+x}$ כי גם פונקציה זאת וגם הפונקציה

$$\frac{1+x}{e^x+x}$$

חיוביות בתחום $[1,\infty)$. בתחום שלנו $1 \le x$ ולכן נקבל כי

$$\int_1^\infty \frac{1+x}{e^x+x}\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{2x}{e^x}\mathrm{d}x$$

כעת נראה שהאינטגרל הימני (הגדול יותר) מתכנס ונסיק שגם האינטגרל שבשאלה מתכנס. נשווה באופן גבולי את $\frac{2x}{e^x}$ עם $\frac{1}{x^2}$ שידוע שמתכנס בתחום שלנו (וכמובן שגם הוא חיובי):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{e^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{e^x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{e^x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty}\frac{12x}{e^x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty}\frac{12}{e^x} = 0$$

ולכן מהתכנסות $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ נסיק את התכנסות $\int_1^\infty \frac{2x}{e^x}\mathrm{d}x$ וממנו נסיק את התכנסות האינטגרל שבשאלה.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+3kn+2n^2}$.

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+3kn+2n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{3kn}{n^2}+2\right)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+3\frac{k}{n}+2}$$

עבור $f(x) = \frac{x}{x^2+3x+2}$ מתקיים שהיא רציפה בקטע $[0,1]$. היא רציפה כי המכנה

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$$

מתאפס רק בנקודות $-1,-2$ שמחוץ לקטע $[0,1]$. לכן נקבל ש

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+3kn+2n^2} \to \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$$

נחשב את $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$ בעזרת שברים חלקיים: קיימים קבועים A,B כך ש

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

נמצא אותם. נעשה מכנה משותף ונשווה מונים לקבל את השיוון

$$x = A(x+2)+B(x+1)$$

ונציב $x=-2$ לקבל $-2=-B$ או $B=2$. נציב $x=-1$ לקבל $A=-1$. מכאן ש

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{-1}{x+1}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{2}{x+2}\mathrm{d}x\\ &= -\ln|x+1|\Big|_0^1 + 2\ln|x+2|\Big|_0^1\\ &= -\ln(2)+2\ln(3)-2\ln(2)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{1}{4}\right)\\ &= \ln\left(\frac{9}{8}\right)\end{aligned}$$

וזוהי התשובה הסופית.

.4

(א) קרבו את $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: טור טיילור של $\sin(x)$ הוא

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב $x=\frac{1}{2}$ נקבל

$$\sin(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}$$

וזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}\right|\le\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!\cdot 2^{2k+1}}\right|=\frac{1}{(2k+1)!\cdot 2^{2k+1}}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\sin(1)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{(2k+1)!\cdot 2^{2k+1}}\le\frac{1}{100}$. עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{100}<\frac{1}{3840}=\frac{1}{5!\cdot 2^5}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}=\frac{1}{1\cdot 2^1}-\frac{1}{3!\cdot 2^3}=\frac{23}{48}\approx 0.479166$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) קרבו את $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: הטור ההנדסי הוא

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ואם נציב $-x$ במקום x נקבל

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

אינטגרל על שני האגפים (בהסתמך תיאוריה של התכנסות במש של טורים ואינטגרלים איבר איבר) נקבל

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t)^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-x)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

לכל $|x|<1$ ולכן

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(n+1)\,2^{n+1}}$$

אם ניקח קירוב להיות מהצורה

$$\sum_{n=0}^{k-1}\frac{-1}{(n+1)\,2^{n+1}}$$

(עבור k מסוים) אז את השגיאה

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{-1}{(n+1)\,2^{n+1}}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{-1}{(n+1)\,2^{n+1}}$$

ניתן לחסום על ידי

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{-1}{(n+1)\,2^{n+1}}\right|=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}\leq\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{k}}$$

כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{100}\leq\frac{1}{2^{k}}$. עבור $k=10$ נקבל $\frac{1}{100}<\frac{1}{1024}=\frac{1}{2^{10}}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{10-1}\frac{-1}{(n+1)\,2^{n+1}}=-\left(\frac{1}{1\cdot 2^{1}}+\frac{1}{2\cdot 2^{2}}+\cdots+\frac{1}{9\cdot 2^{9}}\right)=\frac{44711}{64512}\approx-0.693064856$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ כמבוקש..

5. נביט בפונקציה

$$f(x)=\int_{0}^{x}\sqrt{t}\cdot e^{t}\mathrm{d}t$$

(א) מצאו את הערך המינימאלי של הפונקציה f בקטע $[0,\infty)$.
פתרון: הפונקציה $\sqrt{t}\cdot e^{t}\geq 0$ ולכן לכל x אי שלילי מתקיים כי

$$0\leq\int_{0}^{x}\sqrt{t}\cdot e^{t}\mathrm{d}t$$

כלומר $0\leq f(x)$. כיוון ש $f(0)=0$ נקבל שזה הערך המינימאלי של הפונקציה.

(ב) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$.
פתרון: כיוון ש $[0,x]$ הוא קטע ששואף ל 0 כאשר $x\to 0^{+}$, נקבל ש

$$\lim_{x\to 0^{+}}f(x)=0$$

כי זהו אינטגרל של פונקציה רציפה על קטע ששואף ל 0. מכאן שנוכל להשתמש בלופיטל והמשפט היסודי של החדוא

לקבל

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^{\frac{3}{2}}} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}e^x}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$