פיתרון תרגיל 1:

תשובה 1:

א. יהי $0 \neq v \in V$. נתבונן בצירוף הלינארי $a_0 v + a_1 T(v) = 0$ (1). עלינו להוכיח שהמקדמים (בשדה) שווים לאפס. ראשית נפעיל על שני אגפי המשוואה את ההעתקה T ונקבל $a_0 T(v) + a_1 T^2(v) = T(a_0 v + a_1 T(v)) = T(0) = 0$

מאחר ש $T^2 = -Id$ נקבל ש $a_0 T(v) + a_1(-v) = 0$. נפעיל שוב את T על שני אגפי המשוואה האחרונה ונקבל $a_0 T^2(v) - a_1 T(v) = T\big(a_0 T(v) + a_1(-v)\big) = T(0) = 0$.

שוב, מאחר ש $T^2 = -Id$ נקבל ש $a_0(-v) + a_1 T(v) = 0$. הפעלה שלישית של T תתן באופן דומה ש $-a_0 T(v) + a_1 v = 0$ (2) . נסכום את משוואה (1) מוכפלת ב a_1 עם משוואה (2) מוכפלת ב a_0 ונקבל ש $(a_0^2 + a_1^2)T(v) = 0$. הפעלה של T על המשוואה הזו נותנת $(a_0^2 + a_1^2)(-v) = 0$.

מאחר ש $v \neq 0$ נובע ש $a_0^2 + a_1^2 = 0$ ולכן $a_0 = a_1 = 0$ כדרוש.

ב. על סמך סעיף (א) נוכל לקחת את הבסיס הסדור $B = \{T(v), v\}$. נשים לב ש $[T(v)]_B = (1,0)$ ובנוסף $[T(T(v))]_B = [T^2(v)]_B = [-v]_B = -(0,1) = (0,-1)$. לכן, ביחס לבסיס B מקבלים את ההצגה $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ כדרוש.

תשובה 2:

לא. הגדירו $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ע"י $T(x,y) = x - y$ זוהי העתקה לינארית. עתה $T(0,1) = -1$ ו- $T(1,0) = 1$ לכן אינה מתאפסת על הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ אבל $(1,1) \in KerT$.

תשובה 3:

ראשית $(T+S)(v) = T(v) + S(v)$ ו- $(\alpha \cdot T)(v) = \alpha\, T(v)$ הן בבירור העתקות לינאריות (יש להראות בדרך הסטנדרטית) מ- V ל- W. לכן הפעולות מוגדרות היטב.

תשובה 4:

א. לפי מה שהוכחתם בתרגיל 3. שימו לב ש $f(T): V \to V$ מתקבלת ע"י סידרה של הפעלת הפעולות שהוגדרו שם. בשלבים : תחילה כל מונום הוא ה"ל מ- V ל- V כי הכפל מוגדר היטב על $Hom(V,V)$ ולבסוף סכום המונומים הוא ה"ל מ- V ל- V כי החיבור מוגדר היטב על $Hom(V,V)$.

ב. המשך תשובה 4:

יהי $f(t)\in K[t]$ פולינום, ויהי W הגרעין של $f(A)$. אזי W הוא תת מרחב אינווריאנטי תחת A.
אכן, נניח ש $f(A)w=0$. מאחר ש $t\cdot f(t)=f(t)\cdot t$, אנו מקבלים ש
$Af(A)=f(A)A$ (שימו לב A קומוטטיבית עם עצמה ועם סקלרים מהשדה!)
בהתאם לכך נוכל לרשום
$f(A)(Aw)=f(A)Aw=Af(A)w=A\cdot 0=0$
לכן, גם הווקטור Aw נמצא בגרעין של $f(A)$. ז"א $A(Ker(f(A)))\subseteq Ker(f(A))$.

נציין כאן באופן כללי שלכל זוג פולינומים f,g מתקיים ש $f(A)g(A)=g(A)f(A)$
בגלל ש $f(t)g(t)=g(t)f(t)$. (ניתן להוכיחזאת בצורה בנייתית בהסתמך על הרשום לעיל).

<u>תשובה 5:</u>

א. $(TS)[W]=T\big[S[W]\big]\subseteq T[W]\subseteq W$. המעבר השני נובע מכך ש W תת מרחב S-אינווריאנטי ולכן $S[W]\subseteq W$. המעבר האחרון נובע באותו אופן מאחר ש W תת מרחב T-אינווריאנטי.

ב. מאחר ש T הפיכה היא בפרט חח"ע לכן $KerT=\{0\}$. נגדיר העתקה חדשה $\hat{T}:W\to W$ ע"י $\hat{T}(w)=T(w)$ לכל $w\in W$. ההעתקה זו מוגדרת היטב כי W תת מרחב T-אינווריאנטי. $KerT=\{0\}$ לכן גם $Ker\hat{T}=\{0\}$ לכן $\dim\big(Ker\hat{T}\big)=0$. לכן לפי משפט המימדים נקבל ש $\dim\big(Im\hat{T}\big)=\dim(W)$. כמו כן, לפי ההגדרה $Im\hat{T}\subseteq W$. לכן צירוף של 2 הטענות האחרונות והגדרת $\hat{T}$ מקבלים ש $T[W]=Im\hat{T}=W$. לבסוף,

$$W=Id_V[W]=(T^{-1}T)[W]=T^{-1}\big[T[W]\big]=T^{-1}[W]$$

(שימו לב המעבר האחרון נובע ממה שהוכחנו לפני כן). לכן W תת- מרחב T^{-1} – אינווריאנטי.