תרגיל 8 – מתמטיקה לכימאים ג'

חלק א' - טורי טיילור

1. פתחו את הפונקציות הבאות לטורי טיילור סביב הנקודות הנתונות

1.1 $f(x)=(1+x^2)\cos x$ סביב $x=0$.

פתרון: ידוע כי לכל x, $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. לכן, לכל x,

$$f(x)=(1+x^2)\cos x=(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n)!}\underset{\substack{for\_the\_2nd\_series\\ 2k=2n+2\Leftrightarrow k=n+1}}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{(2k-2)!}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n-2)!}\underset{\substack{instead\_of\_starting\_the\_first\_series\_from\_n=0\\ we\_calculate\_the\_n=0\_element\_and\_start\_the\_series\_from\_n=1}}{=}$$

$$\frac{(-1)^0 x^{2\cdot 0}}{(2\cdot 0)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n-2)!}=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n-2)!}=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\right)x^{2n}=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n+(-1)^{n-1}(2n-1)(2n)}{(2n)!}\right)x^{2n}=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{-1+(2n-1)(2n)}{(2n)!}\right)x^{2n}=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4n^2-2n-1}{(2n)!}\right)x^{2n}\underset{\substack{for\_n=0\_(-1)^{n-1}\left(\frac{4n^2-2n-1}{(2n)!}\right)x^{2n}=-1\cdot -1=1\\ so\_we\_can\_enter\_1\_into\_the\_series\_by\_starting\_it\_from\_n=0}}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4n^2-2n-1}{(2n)!}\right)x^{2n}$$

בפרט, בסביבת $x=0$ הפונקציה הנתונה שווה ל $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4n^2-2n-1}{(2n)!}\right)x^{2n}$. לכן

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4n^2-2n-1}{(2n)!}\right)x^{2n}$ הוא טור מקלורן של הפונקציה.

1.2. $f(x)=(x+1)e^x$ סביב $x=-2$.

פתרון: ידוע כי לכל x , $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. לכן, לכל x ,

$$
\begin{aligned}
&f(x)=(x+1)e^x=(x+2-1)e^{x+2-2}=\\
&e^{-2}((x+2)-1)e^{x+2}=\\
&e^{-2}((x+2)-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}=\\
&e^{-2}\left((x+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right)=\\
&e^{-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right)\underset{\substack{for\_the\_1st\_series\\k=n+1}}{=}\\
&e^{-2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{(k-1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right)=\\
&e^{-2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n-1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right)\underset{\substack{instead\_of\_starting\_the\_second\_series\_from\_n=0\\we\_calculate\_the\_n=0\_element\_and\_start\_the\_series\_from\_n=1}}{=}\\
&e^{-2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n-1)!}-\left(\frac{(x+2)^0}{0!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right)\right)=\\
&e^{-2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n-1)!}-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right)\right)=\\
&e^{-2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n-1)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}-1\right)=\\
&e^{-2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)(x+2)^n-1\right)=\\
&e^{-2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n!}\right)(x+2)^n-1\right)\underset{\substack{for\_n=0\_\left(\frac{n-1}{n!}\right)(x+2)^n=-1\\so\_we\_can\_enter\_-1\_into\_the\_series\_by\_starting\_it\_from\_n=0}}{=}\\
&e^{-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n!}\right)(x+2)^n\right)=\\
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)(x+2)^n}{e^2 n!}
\end{aligned}
$$

לכן, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)(x+2)^n}{e^2 n!}$ הוא טור טיילור המבוקש.

2. היעזרו בפיתוח מקלורן של $f(x)=e^x$ למציאת הקירובים הבאים:

2.1 קירוב ל $\frac{1}{e}$ בדיוק של 10^{-5}.

פתרון: ידוע כי לכל x, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. בפרט, עבור $x=-1$,

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

זהו טור לייבניץ (טור עם סימנים מתחלפים וכן $a_n=\frac{1}{n!}$ מונוטונית יורדת שואפת לאפס).

לכן, מספיק לסכום את אברי הטור עד שנגיע לאיבר שבערכו המוחלט קטן מהדיוק הדרוש.

לכן:

$$\frac{1}{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\approx 1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\overbrace{\frac{1}{9!}}^{less\_than\_10^{-5}}$$

לכן, בדיוק הדרוש,

$$\frac{1}{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\approx 1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}=0.367881944$$

קירוב e^{-3} בדיוק של 0.01.

ידוע כי לכל x, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. בפרט, עבור $x=-3$,

$$e^{-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n!}$$

זהו טור עם סימנים מתחלפים. נראה כי זהו טור לייבניץ.

נסמן, $a_n=\frac{3^n}{n!}$. צריך להוכיח כי a_n סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס.

אבל, a_n סדרה חיובית ולכל n טבעי

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}=\frac{3}{n+1}\le 1$$

לכן, a_n סדרה מונוטונית יורדת.

בנוסף, מכיוון ש $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$ לפי משפט המנה הסדרה a_n שואפת לאפס. לכן, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n!}$ הוא טור לייבניץ.

לכן, מספיק לסכום את אברי הטור עד שנגיע לאיבר שבערכו המוחלט קטן מהדיוק הדרוש.

לכן:

$$e^{-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n!}\approx 1-3+\frac{3^2}{2!}-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}-\frac{3^5}{5!}+\frac{3^6}{6!}-\frac{3^7}{7!}+\frac{3^8}{8!}-\frac{3^9}{9!}+\frac{3^{10}}{10!}-\overbrace{\frac{3^{11}}{11!}}^{less\_than\_0.01}$$

לכן, בדיוק הדרוש,

$$e^{-3}\approx 1-3+\frac{3^2}{2!}-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}-\frac{3^5}{5!}+\frac{3^6}{6!}-\frac{3^7}{7!}+\frac{3^8}{8!}-\frac{3^9}{9!}+\frac{3^{10}}{10!}\approx 0.053325892$$

3. ענו על הסעיפים הבאים:

3.1 מצאו את טור טיילור של $f(x)=\frac{1}{x}$ סביב $x=1$. מהו תחום התכנסותו?

פתרון: ידוע כי $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ לכל $-1<x<1$. לכן,

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1+1}=\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{1-(-(x-1))}=\underset{\substack{for\_all\_x\_such\_that\\ -1<-(x-1)<1\Leftrightarrow\\ 1>x-1>-1\Leftrightarrow\\ 2>x>0}}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-(x-1)\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

כלומר, בסביבת $x=1$ הפונקציה הנתונה שווה ל $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ לכן $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ הוא טור טיילור המבוקש. תחום התכנסותו: $0<x<2$.

3.2 מצאו את טור טיילור של $f(x)=\ln x$ סביב $x=1$. מהו תחום התכנסותו?

רמז: כאשר עושים אינטגרציה לטור חזקות סביב a מומלץ לעשות את האינטגרציה מ a עד x. (לדוגמה, כשעשינו אינטגרציה לטור חזקות סביב 0, האינטגרלים היו מ 0 עד x).

פתרון: ראינו כי לכל $0<x<2$, $\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$.

נוציא אינטגרל לשני הצדדים:

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t-1)^n dt$$

לפי משפט אינטגרציה איבר איבר, לכל $0 < x < 2$,

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t-1)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x (-1)^n (t-1)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n (t-1)^{n+1}}{n+1} \right]_1^x =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$$

אבל, $\int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln|t|]_1^x = \ln|x| - \ln 1 = \ln|x| \underset{0<x<2}{=} \ln x$.

כלומר, לכל $0 < x < 2$, $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$.

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$ בקצוות.

$x = 2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

$x = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$ מתבדר.

לכן, טור טיילור המבוקש של $\ln x$ הוא $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$. תחום התכנסותו: $0 < x \le 2$

3.3 חשבו $\ln 2$ בקירוב של $\frac{1}{6}$.

פתרון: מכיוון ש $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$ לכל $0 < x \le 2$ ובפרט עבור $x = 2$,

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

אבל, זהו טור לייבניץ. (טור עם סימנים מתחלפים שבו, $a_n = \frac{1}{n+1}$ היא סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס).

לכן, מספיק לסכום את אברי הטור עד שנגיע לאיבר שבערכו המוחלט קטן מהדיוק הדרוש.

לכן:

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \approx \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \overbrace{\frac{1}{7}}^{less\_than:\frac{1}{7}}$$

ובדיוק הדרוש:

$$\ln 2 =\approx \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60}$$

4. ענו על הסעיפים הבאים:

4.1 מצאו את טור מקלורן של $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. מהו תחום התכנסותו?

פתרון: ידוע כי $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ לכל $-1<x<1$. לכן,

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\underset{\substack{for\_all\_x\_such\_that \\ -1<-x^2<1\Leftrightarrow \\ 1>x^2>-1\Leftrightarrow \\ 1>x^2\Leftrightarrow \\ 1>x>-1}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

כלומר, בסביבת $x=0$ הפונקציה הנתונה שווה ל $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ לכן $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ הוא טור מקלורן המבוקש. תחום התכנסותו: $-1<x<1$.

4.2 מצאו את טור מקלורן של $f(x)=\arctan x$. מהו תחום התכנסותו?

פתרון: ראינו כי לכל $-1<x<1$, $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

נוציא אינטגרל לשני הצדדים:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt$$

לפי משפט אינטגרציה איבר איבר, לכל $-1<x<1$,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

אבל, $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=[\arctan t]_0^x=\arctan x-\arctan 0=\arctan x$.

כלומר, לכל $-1<x<1$, $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ בקצוות.

$x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

$x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

לכן, טור מקלורן של $\arctan x$ הוא $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. תחום התכנסותו: $-1\le x\le 1$

4.3 חשבו את הערך של π בדיוק של 0.2. (רמז: $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$).

נשים לב, $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, לכן, $\pi=4\arctan 1$

אבל, לכל $-1\le x\le 1$, $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

לכן, לכל $-1\le x\le 1$, $4\arctan x=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

בפרט, עבור $x=1$,

$$\pi=4\arctan 1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

אבל, זהו טור לייבניץ. (טור עם סימנים מתחלפים שבו, $a_n=\frac{4}{2n+1}$ היא סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס).

לכן, מספיק לסכום את אברי הטור עד שנגיע לאיבר שבערכו המוחלט קטן מהדיוק הדרוש.

לכן:

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{2n+1}\approx\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}-\frac{4}{15}+\frac{4}{17}-\frac{4}{19}+\overbrace{\frac{4}{21}}^{less\_than:0.2}$$

ובדיוק הדרוש:

$$\pi\approx\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}-\frac{4}{15}+\frac{4}{17}-\frac{4}{19}=3.041839613$$

<u>חלק ב' – מד"ר</u>

הערה: כאשר מחפשים פתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ למד"ר כלשהי ונתונים תנאי התחלה:

$$y(0)=a$$
$$y'(0)=b$$

המשמעות היא שבפתרון:

$$a_0=y(0)=a$$
$$a_1=y'(0)=b$$

כלומר תנאי ההתחלה נותנים לנו את האיברים a_0,a_1 של הטור. כפי שראינו בכיתה, במצב זה, כלל הנסיגה נותן לנו את הערך של שאר המקדמים בטור ולכן, מתקבל פתרון ספציפי (ללא קבועים), בדיוק כפי שהיינו מצפים לקבל במקרה שנתונים לנו תנאי התחלה.
אי"ה אנחנו נסביר את זה בשיעור הבא, אבל אתם יכולים להשתמש בזה כבר בתרגילים הבאים.

מכיוון שהתרגיל הפעם מעט ארוך, שאלות 8 ו 9 אינן להגשה. כמובן, מומלץ לפתור אותן (לפחות לפני המבחן) לצורך תרגול נוסף.

5. למשוואה $y''-x^2y'+xy=0$ פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

5.1 מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

פתרון: נתון כי למד"ר יש פתרון מהצורה:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

נגזור:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

נציב במד"ר:

$$y''-x^2y'+xy=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

ניתן להתחיל את הטור השני מהאינדקס אפס במקום מאחת

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} -n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-n+1) a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (1-n) a_n x^{n+1} = 0$$

עבור הטור השני נשתמש בהחלפה: $k-2=n+1$ $(k=n+3 \Leftrightarrow)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{k=3}^{\infty} (1-(k-3)) a_{k-3} x^{k-2} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (4-n) a_{n-3} x^{n-2} = 0$$

$$2(2-1)a_2x^{2-2}+\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=3}^{\infty}(4-n)a_{n-3}x^{n-2}=0$$

$$2a_2+\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=3}^{\infty}(4-n)a_{n-3}x^{n-2}=0$$

$$2a_2+\sum_{n=3}^{\infty}[n(n-1)a_n+(4-n)a_{n-3}]x^{n-2}=0$$

מתקיים שוויון אמ"ם,

$$a_2=0$$

ולכל $n\ge 3$,

$$n(n-1)a_n+(4-n)a_{n-3}=0$$

$$a_n=\frac{-(4-n)}{n(n-1)}a_{n-3}$$

$$a_n=\frac{n-4}{n(n-1)}a_{n-3}$$

לכן, נוסחת הרקורסיה היא:

$$\begin{cases} a_2=0 \\ a_n=\dfrac{n-4}{n(n-1)}a_{n-3} \qquad n\ge 3 \end{cases}$$

5.2 בהינתן $y(0)=2$, $y'(0)=3$, מצאו a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5.

פתרון:

$a_0=2 \Leftarrow y(0)=2$

$a_1=3 \Leftarrow y'(0)=3$

לפי מה שמצאנו $a_2=0$

ע"י הצבת $n=3$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_3=\frac{3-4}{3(3-1)}a_{3-3}=\frac{-1}{6}a_0=\frac{-1}{6}\cdot 2=-\frac{1}{3}$$

ע"י הצבת $n=4$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_4=\frac{4-4}{4(4-1)}a_{4-3}=0$$

ע"י הצבת $n=5$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_5=\frac{5-4}{5(5-1)}a_{5-3}=\frac{1}{20}a_2=\frac{1}{20}\cdot 0=0$$

6. עבור המד"ר $y''-2xy'+y=0$ בסביבת הנקודה $x=0$:

6.1 קבעו אם קיים למד"ר פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

פתרון: נסמן: $P(x)=1, Q(x)=-2x, R(x)=1$

נשים לב, $P(x), Q(x), R(x)$ אנליטיות בסביבת $x=0$.

בנוסף, $P(0)=1\neq 0$ לכן, $x=0$ נקודה רגולרית ומובטח פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

6.2 מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n עבור פתרון כזה.

פתרון:

עבור פתרון מהצורה:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

נגזור:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

נציב במד"ר:

$$y''-2xy'+y=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

עבור הטור הראשון נשתמש בהחלפה $k=n-2$ $(n=k+2 \Leftrightarrow)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^{k} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

נשים לב, בטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n$ אם נציב, $n=0$ נקבל אפס, לכן ניתן להתחיל את הטור מהאינדקס אפס. (המשמעות היא הוספה של איבר שערכו אפס).

לכן,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2n a_n + a_n\right] x^n = 0$$

מתקיים שוויון אמ"ם, לכל $n \geq 0$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + a_n = 0$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (2n-1)a_n$$
$$a_{n+2} = \frac{(2n-1)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

כלומר, לכל $n \ge 0$
$$a_{n+2} = \frac{(2n-1)}{(n+1)(n+2)}a_n$$
נציב, $k = n+2$ ($n = k-2 \Leftarrow$). אזי,

נוסחת הרקורסיה היא: לכל $k \ge 2$
$$a_k = \frac{(2k-5)}{(k-1)k}a_{k-2}$$

6.3 בהינתן $y'(0) = 5, y(0) = -1$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

פתרון:

$a_0 = -1 \Leftarrow y(0) = -1$

$a_1 = 5 \Leftarrow y'(0) = 5$

ע"י הצבת $k = 2$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:
$$a_2 = \frac{2\cdot 2 - 5}{(2-1)2}a_{2-2} = \frac{-1}{2}a_0 = \frac{-1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2}$$

ע"י הצבת $k = 3$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:
$$a_3 = \frac{1}{2\cdot 3}a_1 = \frac{1}{6}\cdot 5 = \frac{5}{6}$$

ע"י הצבת $k = 4$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:
$$a_4 = \frac{3}{3(4)}a_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$
ע"י הצבת $k = 5$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:
$$a_5 = \frac{5}{4(5)}a_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{24}$$

7. עבור המד"ר $(1+x^2)y''+2xy'=0$ בסביבת הנקודה $x = 0$.

7.1 קבעו אם הנקודה $x = 0$ היא נקודה רגולרית. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.
פתרון: נסמן: $P(x) = 1 + x^2, Q(x) = 2x, R(x) = 0$ ונשים לב, $P(x), Q(x), R(x)$
אנליטיות בסביבת $x = 0$. בנוסף, $P(0) = 1 + 0^2 = 1 \ne 0$, לכן, $x = 0$ נקודה רגולרית.

7.2 נתון כי $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא פתרון למד"ר הנתונה. מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n.

פתרון:
עבור פתרון מהצורה:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \, .$$

נגזור:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$$

נציב במד"ר:

$$(1+x^2)y''+2xy'=0$$

$$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+2x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^{n}=0$$

עבור הטור הראשון נשתמש בהחלפה $k=n-2$ $(n=k+2\Leftrightarrow)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^{n}=0$$

נשים לב, בטור $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n$ אם נציב, $n=0$ או $n=1$ נקבל אפס, לכן ניתן להתחיל את הטור מהאינדקס אפס. (המשמעות היא הוספה של שני איברים שערכם אפס).

לכן,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^{n}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+n(n-1)a_n+2na_n\right]x^n=0$$

מתקיים שוויון אמ"ם, לכל $n\geq 0$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+n(n-1)a_n+2na_n=0$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=-n(n-1)a_n-2na_n$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=-\left[n(n-1)+2n\right]a_n$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=-\left[n^2-n+2n\right]a_n$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=-\left[n^2+n\right]a_n$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=-n(n+1)a_n$$

כלומר, לכל $n\geq 0$

$$a_{n+2}=-\frac{n}{n+2}a_n$$

נציב, $k=n+2$ ($n=k-2 \Leftarrow$) . אזי,

נוסחת הרקורסיה היא: לכל $k \geq 2$

$$a_k = -\frac{k-2}{k} a_{k-2}$$

7.3. בהינתן $y(0)=0, y'(0)=3$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

פתרון:

$y(0)=0 \Rightarrow a_0 = 0$

$y'(0)=3 \Rightarrow a_1 = 3$

ע"י הצבת $k=2$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_2 = -\frac{2-2}{2} a_{2-2} = 0$$

ע"י הצבת $k=3$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_3 = -\frac{1}{3} a_1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$$

ע"י הצבת $k=4$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_4 = -\frac{2}{4} a_2 = 0$$

ע"י הצבת $k=5$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_5 = -\frac{3}{5} a_3 = -\frac{3}{5} \cdot (-1) = \frac{3}{5}.$$

8. עבור המד"ר $y''+x^2 y = 0$:

8.1. קבעו אם קיים למד"ר פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.

פתרון:

נסמן: $P(x)=1, Q(x)=0, R(x)=x^2$ ונשים לב, $P(x), Q(x), R(x)$ אנליטיות בסביבת $x=0$ בנוסף, $P(0)=1 \neq 0$ לכן, $x=0$ נקודה רגולרית ולמד"ר קיים פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

8.2. מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n .

פתרון:

עבור פתרון מהצורה:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

נגזור:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

נציב במד"ר:

$$y''+x^2 y = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

עבור הטור הראשון נשתמש בהחלפה $k = n-2$ $(n = k+2 \Leftrightarrow)$

עבור הטור השני נשתמש בהחלפה $k = n+2$ $(n = k-2 \Leftrightarrow)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k = 0$$
$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k = 0$$
$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_{k-2}\right] x^k = 0$$

מתקיים שוויון אמ"ם,

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$
$$6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

וכן לכל $k \geq 2$,

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_{k-2} = 0$$
$$a_{k+2} = -\frac{a_{k-2}}{(k+1)(k+2)}$$

נציב, $n = k+2$ $(k = n-2 \Leftarrow)$. אזי,

לכל $n \geq 4$

$$a_n = -\frac{1}{(n-1)n} a_{n-4}$$

לכן, לכל a_0, a_1

$$a_2 = 0, a_3 = 0$$

לכן, נוסחת הרקורסיה היא:

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_n = -\dfrac{1}{(n-1)n} a_{n-4} \qquad n \ge 4 \end{cases}$$

8.3 בהינתן $y'(0)=0, y(0)=1$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

פתרון:

$a_0 = 1 \Leftarrow y(0)=1$

$a_1 = 0 \Leftarrow y'(0)=0$

ראינו כי $a_2 = a_3 = 0$.

ע"י הצבת $k=4$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_4 = -\frac{1}{(4-1)4} a_{4-4} = -\frac{1}{12} a_0 = -\frac{1}{12} \cdot 1 = -\frac{1}{12}$$

ע"י הצבת $k=5$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_5 = -\frac{1}{(5-1)5} a_1 = 0 \ .$$

9. עבור המד"ר $y''-2xy=0$.

9.1 קבעו אם הנקודה $x=0$ היא רגולרית. אם כן, המשיכו לסעיפים הבאים.
פתרון:
נסמן: $P(x)=1, Q(x)=0, R(x)=-2x$ ונשים לב, $P(x), Q(x), R(x)$ אנליטיות בסביבת $x=0$ בנוסף, $P(0)=1\neq 0$ לכן, $x=0$ נקודה רגולרית.

9.2 נתון כי $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא פתרון למד"ר הנתונה. מצאו נוסחת נסיגה (נוסחת רקורסיה) לחישוב a_n .

פתרון: עבור פתרון מהצורה:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

נגזור:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

נציב במד"ר:

$$y''-2xy=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = 0$$

עבור הטור השני נשתמש בהחלפה $k-2=n+1$ $(k=n+3 \Leftrightarrow)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{k=3}^{\infty} 2a_{k-3} x^{k-2} = 0$$
$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-3} x^{n-2} = 0$$
$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n(n-1)a_n - 2a_{n-3}\right] x^{n-2} = 0$$

מתקיים שוויון אמ"ם,

$$a_2 = 0$$

ולכל $n \ge 3$,

$$n(n-1)a_n - 2a_{n-3} = 0$$
$$a_n = \frac{2}{(n-1)n} a_{n-3}$$

לכן, נוסחת הרקורסיה היא:

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_n = \dfrac{2}{(n-1)n} a_{n-3} \quad n \ge 3 \end{cases}$$

9.3. בהינתן $y(0)=0,\ y'(0)=3$, מצאו $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

פתרון:

$a_0 = 0 \Leftarrow y(0) = 0$

$a_1 = 3 \Leftarrow y'(0) = 3$

לפי מה שמצאנו $a_2 = 0$

ע"י הצבת $n=3$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_3 = \frac{2}{(3-1)3} a_{3-3} = \frac{2}{6} a_0 = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

ע"י הצבת $n=4$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_4 = \frac{2}{(3)4} a_1 = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$$

ע"י הצבת $n=5$ בנוסחת הרקורסיה נקבל:

$$a_5 = \frac{2}{4\cdot 5}a_2 = \frac{1}{10}\cdot 0 = 0$$

בהצלחה! ☺