# תרגיל 1

להגשה עד 1.11.15

## שאלה 1

יהי $X$ מרחב לינארי ונורמי. הוכיחו כי:

$A\subseteq X$ סגורה אם ורק אם לכל סדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ מתקיים:

$$a_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}a \implies a\in A$$

## שאלה 2

יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע סגור.

נגדיר

$$C\left(I\right):=\left\{f\mid f:I\longrightarrow\mathbb{C}\ ;\ f\ is\ continuous\right\}\ ;\ \left\Vert\cdot\right\Vert_{C(I)}=\max_{t\in I}\left|f(t)\right|$$

הוכיחו כי:

1. $\left(C(I),\ \left\Vert\cdot\right\Vert_{C(I)}\right)$ הינו מרחב לינארי ונורמי.
2. ההתכנסות ב $C\left(I\right)$ שקולה להתכנסות במידה שווה.
3. תהי

$$A=\left\{f\mid\exists t:\ \left|f(t)\right|>1\right\}$$

הוכיחו כי $A$ פתוחה ב $C\left(I\right)$.

4. תהי

$$B=\left\{f\mid\forall t:\ \left|f(t)\right|>1\right\}$$

האם $B$ פתוחה ב $C(I)$?

## שאלה 3

נתבונן ב $\mathbb{R}$ עם הנורמה האוקלידית (ערך מוחלט).

הוכיחו כי כל קבוצה פתוחה $V\subseteq\mathbb{R}$ הינה איחוד בן מנייה של קבוצות של קטעים זרים פתוחים ב $\mathbb{R}$.

רמז: העזרו בתכונת הספרביליות של המרחב.

בהנאה :)