

קורס 89-113, אביב 2017, מועד ב'
מרצים: פרופ' בוריס קוניאבסקי, ד"ר איל קפלן
מתרגלים: אחיה בר-און, עוזי הרוש.

בחינה בקורס אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב

- משך הבחינה 3 שעות, ללא מחשבוניס או חומר עזר.
אנא ענו על כל השאלות, כל שאלה 25 נקודות.
מחברת הבחינה לא תיבדק!
יש למלא את התשובות המלאות על הטופס, במידת הצורך יש להשתמש בצידו האחורי של הדף. יש לכתוב את התשובה הסופית במקום המיועד לכך.
1. (א) תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ מטריצה שאין לה ערכים עצמיים ממשיים. הוכיחו כי A לכסינה מעל \mathbb{C} .

(ב) תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ויהי n טבעי. חשבו את A^n .

תשובה: $A^n =$ _____

$$2. \text{ תהי } A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

(א) מהו הפולינום האופייני של A ? $p_A = \dots$

(ב) מצאו את הערכים העצמיים של A ולכל ערך עצמי, מצאו ריבוי אלגברי, ריבוי גיאומטרי ורשמו בסיס למרחב העצמי שלו. מלאו את התשובות בטבלה הבאה.

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	בסיס למרחב העצמי

(ג) אם A לכסינה, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $P^{-1}AP = D$. אם לא, הסבירו מדוע.

3. יהי $W \subset V$ מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה המרוכבים ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית הפיכה.

(א) הוכיחו כי לכל העתקה לינארית $S : V \rightarrow V$, $\text{Ker}TS = \text{Ker}S$.

(ב) הוכיחו כי לכל טבעי $l > 0$ ולכל ערך עצמי λ של T ,

$$\text{Ker}((T - \lambda id_V)^l) = \text{Ker}((T^{-1} - \lambda^{-1} id_V)^l)$$

(id_V זו העתקת הזהות על V).

(ג) מצאו את הפירוק הפרימרי של V ביחס להעתקה T^{-1} (כתבו את המרחב כסכום ישר של גרעינים...).

4. יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצות אוניטריות. הוכיחו כי $A^{-1}BA$ אוניטרית.

בהצלחה !