

עבודת בית 1

מד"ר למדעי המח, סמסטר א' תשפ"ג

בדיקת פתרון למד"ר:

1. בדקו האם $y = \frac{\sin(x^2)}{2x^2} + C$ היא הפתרון הכללי למד"ר $3xy^2y' + 2y = \cos(x^2)$
2. בדקו האם $y = \frac{x}{x^2-2}$ היא הפתרון הפרטי למד"ר $xy + \frac{x}{y} \cdot y' - 1 = 0$ עם תנאי ההתחלה $y(2) = 1$
3. בדקו האם $y = C_1 + C_2e^{-2x} + C_3x^2e^{-2x}$ הוא פתרון כללי למד"ר $y''' + 4y'' + 4y' = 0$
4. בדקו האם $y = e^{-x} + 2e^{-x} + x^2e^{-x}$ היא פתרון למד"ר $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

פתרון מד"ר פרידה:

פתרו את המד"ר הבאות-

1. $y' = xysin(x)$
2. $(y - xy) \cdot y' = -xy^2 - x$
3. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \sin(2x) + \cos(3y) \cdot y' = 0$
4. $y' = \frac{5x^3}{\cos(y)+e^y}$
5. $y \cdot y' - e^{2x+y} = 0$
6. $y(0) = -2, y' = \frac{2x}{y+x^2y}$

עבודת בית 1
מד"ר לינארית

פתרון מד"ר לינארית:

פתרו את המד"ר הבאות-

1. $y' - 2x = xe^{x^2}$

2. $xy' + y = x^3$

3. $y' - y\sin(x) = \sin(x)\cos(x)$

4. $(xy' - 1)\ln(x) = 2y$

5. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

פתרו את בעיות ההתחלה הבאות-

1. $y(1) = 0, xy' + y = \frac{1}{1+x^2}$

2. $y(\pi) = 1, y' = \cos(x) \cdot (1 - 2y)$

3. $y' + \tan(x)y = x\sin(2x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ עם תנאי ההתחלה $y(0) = 2$

מד"ר למדעי המח, תרגיל בית 3: "משוואות מדוייקות"

1. מצאו פתרון למשוואות הבאות

$$y = (y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y + 2)y' = 0 \quad (\text{א})$$

$$(2x^3 - 5y^4)y' = -3x^2 + 1 \quad (\text{ב})$$

$$2(1 + \sqrt{x^2 - y})xdx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0 \quad (\text{ג})$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (\text{ד})$$

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0 \quad (\text{ה})$$

2. מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות על ידי מציאת גורם אינטגרציה מתאים

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0 \quad (\text{א})$$

$$y(1 + xy)dx - xdy = 0 \quad (\text{ב})$$

$$(2xy \ln y + y^2 \cos x)dx + (x^2 + y \sin x)dy = 0 \quad (\text{ג})$$

3. מצאו פתרון לבעיות ההתחלה הבאות

$$\begin{cases} y' \sin x - y \cos x = 1 \\ y(\pi) = 1 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} xy' - 3y = x^4 e^x \\ y(1) = e \end{cases} \quad (\text{ב})$$

בהצלחה!

מד"ר למדעי המח, תרגיל בית 4: "טור טיילור"

1. רשמו את טור מקלורן (טור טיילור סביב $x_0 = 0$) של הפונקציות הבאות

(א) e^{2x}

(ב) $\ln(1+x)$

(ג) $\ln(1-x^2)$

(ד) $\frac{1}{1+x}$

(ה) $\frac{1}{(1+x)^2}$

(ו) $\frac{1}{1+x^2}$

(ז) $\arctan x$

2. רשמו את טור טיילור של הפונקציות הבאות

(א) $\frac{1}{1-2x}, x_0 = 1$

(ב) $\sin \frac{x}{2}, x_0 = \pi$

(ג) $\cos 3x, x_0 = \frac{\pi}{6}$

(ד) $\frac{1}{1-(x-2)^2}, x_0 = 2$

3. מצאו קרוב פולינומיאלי (מסדר 4) ל $\ln 3$ (רמז: התבוננו בטור מקלורן של $\ln(1-x)$ וקחו $-\ln \frac{1}{3}$)

בהצלחה!

עבודת בית 5

מד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר גבוה

מצאו פתרונות כלליים למד"ר הבאות

$$1. \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$2. \quad y'' + y' - 2y = 0$$

$$3. \quad y'' - 2y' = 0$$

$$4. \quad y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$5. \quad y'' - 6y' + y = 0$$

$$6. \quad y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$7. \quad y'' + y = 0$$

$$8. \quad y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$$

$$9. \quad y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$10. \quad y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$$

מד"ר למדעי המח, תרגיל בית 6: "משוואות לינאריות לא הומוגניות עם

מקדמים קבועים"

1. מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x} \quad (\text{א})$$

$$y'' + 3y' - 4y = xe^{-x} \quad (\text{ב})$$

$$y'' + y' - 2y = 11 \cos \frac{x}{2} - 7 \sin \frac{x}{2} \quad (\text{ג})$$

$$y''' + y'' = 3xe^x + x^2 + 1 \quad (\text{ד})$$

$$y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x \quad (\text{ה})$$

2. מצאו פתרון לבעיות ההתחלה הבאות

$$\begin{cases} y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1 \\ y(0) = \frac{1}{8} \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = xe^x + 4 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} y''' - 2y' = 3(2 - x^2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

בהצלחה!

עבודת בית 5

מערכות מד"ר- פתרון באמצעות שיטת האלימינציה

מצאו פתרונות כלליים למערכות המד"ר הבאות:

1. מערכת ראשונה:

$$y_1' = y_1 + 2y_2$$

$$y_2' = -y_1 - y_2$$

2. מערכת שנייה:

$$y_1' = 3y_1 - 4y_2 + 1$$

$$y_2' = 4y_1 - 7y_2 + 10x$$

3. מערכת שלישית:

$$y_1' = y_2 - x$$

$$y_2' = y_1 + x$$

4. מערכת רביעית:

$$y_1' = y_1 - y_2 + e^x$$

$$y_2' = y_1 + 3y_2$$

5. מערכת חמישית:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -y_1 + \frac{x+6}{x^4}$$

פתרו את בעיות ההתחלה הבאות:

1. בעיה ראשונה:

$$y_1' = -y_1 + 2y_2$$

$$y_2' = -3y_1 + 4y_2$$

$$y_1(0) = 1 \quad y_2(0) = -1$$

2. בעיה שנייה:

$$y_1' = -2y_1 + y_2$$

$$y_2' = -5y_1 + 5y_2$$

$$y_1(0) = 1 \quad y_2(0) = 3$$

עבודת בית 8

מציאת טורי פורייה לפונקציות

1. מצאו את טור פורייה של הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

2. פתחו את טור פורייה של הפונקציה הבאה, פעם כפונקציה זוגית ופעם כאי-זוגית:

$$f(x) = \sin(2x) + x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

3. f מוגדרת ב- $[0, \pi]$ ע"י $f(x) = \cos(x)$. הציגו את f בעזרת טור סינוסים.

4. מצאו את טור פורייה של הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

מצאו באמצעות טור זה למה שווה הטור הבא:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

5. מצאו את טור פורייה של הפונקציה הבאה:

$$f(x) = x^2 + x \quad -\pi < x < \pi$$

מצאו באמצעות טור זה למה שווה הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

תשובות:

$$1. \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} (-1)^{k+1} \cos((2x-1) \cdot x)$$

$$2. \text{פונקציה זוגית: } \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n - 1) \left(\frac{4}{n^2-4} + \frac{2}{n^2} \right) \cos(nx)$$

$$\text{פונקציה אי-זוגית: } \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \sin(2kx)$$

$$3. \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(2nx)}{4n^2-1}$$

$$4. \frac{1}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \right) \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \text{ וניתן למצוא זאת כאשר מציבים } x=0 \text{ בטור.}$$

$$5. \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \text{ וניתן למצוא זאת כאשר מציבים } x=\pi \text{ בטור.}$$

עבודת בית 9

בעיות מילוליות

פתרו את הבעיות הבאות

(שתי הבעיות הראשונות לקוחות מספרו של סמי זעפרני

<https://samyzaf.com/technion/ode/ode.pdf>)

1. שיעור הילודה בגרמניה בשנת 2014 היה 0.00842, ואילו שיעור התמותה היה 0.0129. מתי אוכלוסיית גרמניה תגיע למחצית מגודלה?
2. לחומרים רדיואקטיביים יש נטיה להתפרק עקב אי-יציבות של אטומים המכילים עודף נויטרונים בגרעין שנוטים לדחות אחד את השני. מספר האטומים שיתפרקו בכל רגע נתון פרופורציונלי למספר של כל האטומים הכולל. אם $y(t)$ היא כמות החומר הרדיואקטיבי בזמן t , אז המשוואה הדיפרנציאלית המתארת דעיכה זו נתונה ע"י: $y'(t) = -ry(t)$. בהינתן ש- r הוא מקדם הדעיכה אשר משתנה בין סוגי החומרים הרדיואקטיביים. המונח "חצי-חיים" (*half-life*) מציין את פרק הזמן הדרוש להתפרקות חצי מהכמות המקורית של החומר הרדיואקטיבי. ידוע במקרה של החומר פחמן-14 תקופת מחצית החיים היא 5568 שנה. חשבו את מקדם הדעיכה של פחמן-14.
3. צנחן בעל מסה m צונח ממהירות התחלתי 0 מגובה רב אל פני הקרקע. הכוחות הפועלים עליו הם כח הכבידה mg וכוח החיכוך עם האוויר בעל מקדם b (כלומר החיכוך מפעיל כוח bv על הצנחן). מצאו את מהירות הצנחן כפונקציה של הזמן t .
4. מגדל מים מכיל מיליון ליטרים של מים טהורים ויש בו שני שסתומים. שסתום אחד מאפשר כניסה של מים מהולים בפלואוריד, כך שריכוז הפלואוריד במים הוא 0.1 ק"ג בכל ליטר מהול. המים המהולים בפלואוריד נכנסים בקצב של 80 ליטר לדקה. השסתום השני מאפשר להוציא את הנוזל במיכל בקצב של 80 ליטר לדקה. כמה זמן ייקח לריכוז הפלואוריד במיכל להיות 0.05 ק"ג לליטר?
5. אוכלוסיית חיידקים מתרבה בקצב פרופורציונלי לגודלה. אם אוכלוסיית החיידקים ביום הראשון הייתה 2 חיידקים, מה יהיה גודל האוכלוסיה כעבור 10 ימים?