12/11/13 בס״ד

עבודה הרצאה

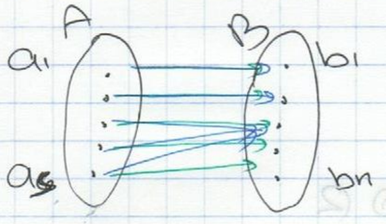
פונקציות

הגדרה: יחס f מקבוצה A לקבוצה B נקרא מלא אם

$\forall a\in A.\exists b\in B.\ afb$

← היחס נקרא חד ערכי אם

$\forall a\in A.\forall b_1,b_2\in B.[(afb_1)\wedge(afb_2)]\rightarrow(b_1=b_2)$



הגדרה: יחס f מ-A ל-B נקרא פונקציה מ-A ל-B אם הוא מלא וחד ערכי

מונחים וסימונים: אם f פונקציה מ-A ל-B ⇐ $f:A\rightarrow B$

⊛ הקבוצה A נקראת התחום של הפונקציה.

• פונקציה צריכה להיות מלאה וגם חד ערכית.

⊛ הקבוצה A נקראת התחום של הפונקציה, B הטווח.

⊛ סימונים: $f(a)=b \iff afb \iff (a,b)\in f$

⊛ אם $f(a)=b$ אומרים ש-a הוא מקור של b ו-b הוא התמונה של a. (יכולים להיות ל-b מספר מקורות)

← הגדרה: המונחים מקור ותמונה מוגדרים גם לקב' אם $f:A\rightarrow B$ ו- $A'\subseteq A$, $B'\subseteq B$ אז התמונה של A'

היא הקבוצה $f(A')=\{b\in B|\exists a\in A'.\ f(a)=b\}$

המקור של B' הוא $\{a\in A|\exists b\in B'.\ f(a)=b\}$

⊛ קב' הפונקציות מ-A ל-B מסומנת B^A

דוגמא: $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$

$\rightarrow B^A=\{\{(a,1),(b,2)\},\{(a,1),(b,1)\},\{(a,2),(b,1)\},\{(a,2),(b,2)\}\}$

⊛ תהא הקבוצה $f:A\rightarrow B$, $D\subseteq A$ אז f מצומצמת ל-D הוא

הפונקציה $f|_D=f\cap D\times B$

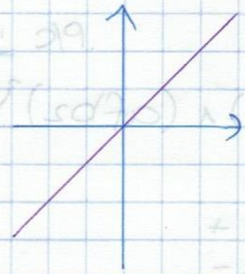
←

12/11/13 קבוצ׳

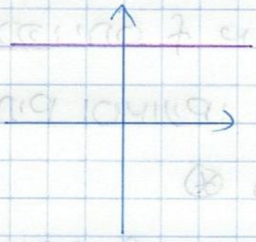
דוגמאות: A לכל הקבוצה A נגדיר $i_A : A \to A$ ע"י $i_A = \{(a,a) | a \in A\}$

i_A נקראת פונקציית הזהות.

דוגמה: הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = x$ היא פונקציית הזהות $i_{\mathbb{R}}$



2) פונקציה $f : A \to B$ נקראת קבועה אם $f(A)$ יש איבר אחד. ($|f(A)| = 1$) הקבוצה



3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ⇐ $f = x^3$

$S = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x = y^2\}$ היא לא פונקציה $f = \sqrt{x}$ מהמשמעות שלעיל.

← היא לא מלאה ($x = -1$)

← לא חד ערכית ($\sqrt{4} = \pm 2$)

⇐ נגביל ל- $S|_{[0,\infty)}$ (צמצום)

הקבוצה המצומצמת שלה לא חד ערכית

← נחתוך את S ב-

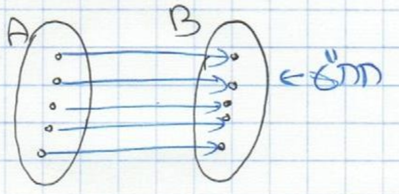
$S' = \{(x,y) | x \in [0,\infty), y \in [0,\infty), x = y^2\}$

← S' היא פונקציה.

הערה: פונקציות f, g שוות אם הן שוות כקבוצות ← הן זוגות שמספיק לבדוק שיש להן אותו תחום ואותו כלל התאמה.

הגדרה: תהי $f:A\to B$ נאמר שf **חח"ע** אם
$\forall a_1,a_2\in A.\forall b\in B.[f(a_1)=b \wedge f(a_2)=b]\to(a_1=a_2)$

נאמר ש-f **על** B אם $\forall b\in B.\exists a\in A.\ f(a)=b$



← ניתן להפוך את הפונקציה

הגדרה: אם A קבוצה סופית נסמן ב-$|A|$ את מספר האיברים ב-A.

טענה: אם A ו B קבוצות סופיות אז יש פונקציה חח"ע ועל מ-A ל-B אם ורק אם $|A|=|B|$

הגדרה: יהיו $f:A\to B$, $g:B\to C$ פונקציות. ההרכבה של g על f מסומנת $g\circ f:A\to C$ ומוגדרת ע"י $\{(a,c)\mid a\in A, c\in C, c=g(f(a))\}$

טענה: אם $f:A\to A$ אז $f\circ i_A=f=i_B\circ f$

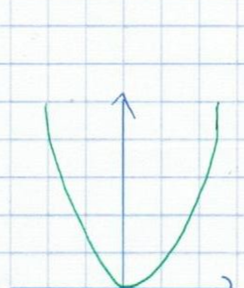
← באופן כללי $i_A\circ f$ לא מוגדר.

• הרכבה קוראים מימין לשמאל.

הגדרה: פונקציה $f:A\to B$ נקראת **הפיכה** אם קיימת פונקציה $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g=i_B$ וגם $g\circ f=i_A$

← במצב זה g נקראת ההופכית של f ומסומנת f^{-1}.

⇐ קל לוודא שאם g היא ההופכית של f אז f היא ההופכית של g (ובפרט גם g הפיכה).



משפט: $f:A\to B$ הפיכה אמ"מ f היא **חח"ע ועל**.

דוגמא: $x^2|_{[0,\infty)}$ ← לא הפיכה כי היא לא על.

ל-$x^2:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ אין הופכית

אבל ל- $x^2:[0,\infty)\to[0,\infty)$ יש הופכית.

הוכחה: נניח ש-$f:A\to B$ חח"ע ועל.

נוכיח שקיימת $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g=i_B$.

עבור $b\in B$ נבחר נקודה $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$ יש כזה כי f היא על.

← המשך הוכחה

12/11/13 בס"ד

נגדיר את $g(b)$ להיות איבר a כלשהו מ-A כך ש- $f(a)=b$

ואז $(f\circ g)(b)=f(g(b))=b$