

מבחן סיום בקורס מבוא לאלגברה לינארית 89-119 מועד א'

סמסטר א' תשע"ח

מרצה: איתמר שטיין

מתרגל: אחמד סלימאן.

תאריך: כ"ג שבט תשע"ח 8.2.18

משך המבחן: שלוש שעות.

הוראות: יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. אם עניתם על 5 שאלות, יש לסמן באופן ברור 4

שאלות שאתם רוצים שתבדקנה. אחרת 4 השאלות הראשונות תבדקנה.

כל שאלה שווה 25 נקודות.

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי פשוט בלבד.

**יש לנמק היטב את תשובותיכם!**

1. נתונה מערכת משוואות התלויה בפרמטר  $a$ .

$$x - 2y + z = -1$$

$$2x + (a - 4)y + az = 0$$

$$-x + (a^2 + a + 2)y - z = 1$$

לאילו ערכי  $a$  יש למערכת פתרון יחיד? אין פתרון? אינסוף פתרונות? במצבים של אינסוף פתרונות מצאו גם את הפתרון הכללי.

2. נתונה מטריצה הפיכה  $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') מצאו את  $A^{-1}$ .

(ב) (10 נק') כתבו את  $A$  בתור מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(ג) (5 נק') תהי  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  מטריצה לא הפיכה. האם למערכת המשוואות  $BAx = 0$  יש פתרון יחיד? אינסוף פתרונות? או שאין פתרון? נמקו תשובתכם.

3. (א) נתונים 4 וקטורים ב  $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

i. (10 נק') נגדיר מרחב וקטורי  $W = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . מצאו בסיס עבור

$W$ . מהו  $\dim W$ ?

ii. (10 נק') נגדיר

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

האם  $u_1 \in W$ ? האם  $u_2 \in W$ ? נמקו.

(ב) (5 נק') חשבו את הזוית בין הוקטורים  $u_1, u_2$  הנתונים בסעיף הקודם.

4. (א) (10 נק') נתונה מטריצה התלויה בפרמטר  $a$

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ a+1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

נתון כי  $A$  הפיכה וכי  $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$ . מצאו את הפרמטר  $a$ .

(ב) (10 נק') נתונה מטריצה  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

i. ביצענו על  $B$  את פעולות השורה הבאות וקיבלנו את המטריצה  $C$ .

$$R_1 \leftrightarrow R_4 \bullet$$

$$R_3 = R_3 - 2R_2 \bullet$$

$$R_2 = 3R_2 \bullet$$

עוד נתון כי  $|C^3| = 8$ . מצאו את  $|B|$ .

ii. (5 נק') האם עמודות  $B$  תלויות לינארית? נמקו.

5. נתונות שתי מטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') הראו כי  $A$  לכסינה ו  $B$  לא לכסינה. נמקו.

(ב) (10 נק') חשבו את  $A^n$ .

(ג) (5 נק') האם המטריצה  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  דומה למטריצה  $B$ ? נמקו.

#### נוסחאות:

• אורך:  $\|u\| = \sqrt{u \bullet u}$

• מרחק:  $d(u, v) = \|u - v\|$

• זווית:  $\cos \alpha = \frac{u \bullet v}{\|u\| \|v\|}$

• הטלה:  $\pi_v(u) = \frac{u \bullet v}{v \bullet v} v$