

פתרון 4 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות $u(x, y)$ הבאות, מצאו $v(x, y)$ כך שהפונקציה

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

תהיה גזירה בתחום הנתון. בטאו את f לפי z (יוצא משהו פשוט).

(א) $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ בכל \mathbb{C} .
פתרון: נמצא את v לפי משוואות קושי רימן

$$u_x(x, y) = (e^x + xe^x) \cos y - e^x y \sin y = v_y$$

ולכן

$$v(x, y) = \int (e^x + xe^x) \cos y - e^x y \sin y dy$$

נזכור ש

$$\int y \sin y dy = -y \cos y + \int \cos y dy = -y \cos y + \sin y$$

ולכן

$$v(x, y) = (e^x + xe^x) \sin y + e^x (y \cos y - \sin y) + C(x) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + C(x)$$

לפי משוואות קושי השנייה,

$$v_x(x, y) = (e^x + xe^x) \sin y + e^x y \cos y + C'(x) = xe^x \sin y + e^x \sin y + e^x y \cos y = -u_y(x, y)$$

כלומר

$$C'(x) = 0$$

ולכן $C(x)$ קבוע. כלומר

$$v(x, y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + D \quad D \in \mathbb{R}$$

כמו כן קל לראות ש u, v שקיבלנו מקיימות את משוואות קושי רימן ולכן f שקיבלנו באמת גזירה. נשים לב ש

$$\begin{aligned} f(z) &= xe^x \cos y - ye^x \sin y + i(xe^x \sin y + e^x y \cos y + D) \\ &= xe^x (\cos y + i \sin y) - ye^x (\sin y - i \cos y) + iD \\ &= xe^x e^{iy} + iye^x (\cos y + i \sin y) + iD \\ &= xe^{x+iy} + iye^{x+iy} + iD = ze^z + iD \end{aligned}$$

(ב) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x$ ב $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
פתרון: כמו בסעיף הקודם

$$u_y = \frac{-2xy}{x^2+y^2} = -v_x$$

כלומר

$$v_x = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

ולכן

$$v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$$

לפי משוואת קושי רימן השנייה

$$u_x = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + 1 = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + C'(y)$$

ולכן

$$C(y) = y + D \quad D \in \mathbb{R}$$

כלומר

$$v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + y + D$$

וקל לוודא שמשוואות קושי רימן מתקיימות. כמו כן,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x}{x^2+y^2} + x + i\left(-\frac{y}{x^2+y^2} + y + D\right) \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} + x + iy + iD = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + z + iD \\ &= z + \frac{1}{z} + iD \end{aligned}$$

2. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos \bar{z}$ גזירה.
פתרון:

$$\cos \bar{z} = \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^y + e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

ברור שה $\frac{1}{2}$ לא משפיע אז נתעלם ממנו לנוחות. יש לנו

$$(\cos x + i \sin x)e^y + e^{-y}(\cos x - i \sin x)$$

כלומר

$$u(x, y) = \cos x(e^y + e^{-y}) \quad v(x, y) = \sin x(e^y - e^{-y})$$

ברור שהכל דיפרנציאבילי

$$u_x = -\sin x(e^y + e^{-y})$$

$$u_y = \cos x(e^y - e^{-y})$$

$$v_x = \cos x(e^y - e^{-y})$$

$$v_y = \sin x(e^y + e^{-y})$$

כלומר משוואות קושי רימן הן

$$-\sin x(e^y + e^{-y}) = \sin x(e^y + e^{-y})$$

$$\cos x(e^y - e^{-y}) = -\cos x(e^y - e^{-y})$$

היות ש $e^y + e^{-y} > 0$ המשוואה הראשונה מכריחה ש $\sin x = 0$ כלומר ש $x = \pi k$
לכן $\cos x \neq 0$ והמשוואה השנייה אומרת ש

$$e^y - e^{-y} = 0$$

שזה בקלות מכריח $y = 0$. לכן הנקודות היחידות שבהן הפונקציה גזירה הן

$$\{(\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

.3

$$(1+i)^{2i} = e^{2i \log(1+i)} = e^{2i \left(\ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \right)} = e^{i \ln 2} e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi k \right)} \quad .\lambda$$

$$(-i)^{-i} = e^{-i \left(\ln(1) + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \right)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k} \quad .\mu$$

.λ

$$\operatorname{Im} \left[(1-i)^{1+i} \right] = \operatorname{Im} \left[e^{(1+i) \left[\ln \sqrt{2} + i \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \right]} \right] = \operatorname{Im} \left[e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k + i \left[\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right]} \right] = e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k} \sin \left[\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right]$$

$$(e^z)^w = 1 \neq e^{-2\pi} = e^{zw} \quad \text{ראו , } z = 2\pi i, w = i \quad .4$$

5. א. עבור הענף העיקרי של הלוגריתם

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

כאשר $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$. אם נסמן $z = Re^{i\theta}$ אז כמובן $\frac{1}{z} = \frac{1}{R}e^{-i\theta}$ ולכן

$$\operatorname{Log} \frac{1}{z} = \ln \left| \frac{1}{z} \right| + i \operatorname{Arg} \left(\frac{1}{z} \right) = -\ln |z| - i\theta = -\operatorname{Log} z$$

כנדרש.

ב. אם נבחר ענף של הלוגריתם שעבורו $\arg(z) \in (0, 2\pi)$ וניקח $z = i$ אז

$$\log \frac{1}{z} = \log(-i) = i \frac{3\pi}{2}$$

ו

$$-\log z = -\log i = -i \frac{\pi}{2}$$

כך שאין שוויון.

6. נפצל את המסילה שלנו לשלושה חלקים

$$\gamma_1(t) = i(1-t), \quad \gamma_2(t) = t, \quad \gamma_3(t) = 1+it$$

כאשר בכל חלק $0 \leq t \leq 1$. נחשב כל חלק של האינטגרל

$$\int_{\gamma_1} z \sin x dz = \int_0^1 i(1-t) \sin 0 \cdot (-i) dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} z \sin x dz = \int_0^1 t \sin t \cdot 1 dt = -t \cos t \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos t dt = -\cos 1 + \sin t \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$$

$$\int_{\gamma_3} z \sin x dz = \int_0^1 (1+it) \sin 1 \cdot i dt = i \sin 1 \left(t + \frac{i}{2} t^2 \right) \Big|_0^1 = i \sin 1 - \frac{1}{2} \sin 1$$

נסכום הכל ונקבל

$$i \sin 1 + \frac{1}{2} \sin 1 - \cos 1$$