

מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (89-132) מועד א (22.02.2018)

מרצה: ד"ר לואי ג'נינגס

מתרגלים: אמונה ליפסקר, דורון פרלמן, ניקול בלשוב

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות!). כל חומר עזר פרט למחשבון- אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

שאלה 1 (24 נקודות – 8 נקודות לכל סעיף)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. יהי H מספר אינסופי חיובי ויהי $0 < b \in \mathbb{R}$. אזי Hb הוא מספר אינסופי חיובי.
ב. תהיינה f, g שתי פונקציות ממשיות ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ קיים והגבול

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) \text{ לא קיים, אז הגבול } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) \text{ לא קיים.}$$

ג. תהי f פונקציה ממשית. אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, אז קיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש- f עולה בקטע (a, ∞) .

שאלה 2 (26 נקודות)

I. נתונה פונקציה ממשית $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת באמצעות:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

א. (7 נקודות) באילו נקודות f רציפה?
ב. (8 נקודות) מצאו את f' בנקודות שבהן f גזירה.
ג. (6 נקודות) האם f' רציפה בכל $x \in \mathbb{R}$? אם כן – הוכיחו; אם לא – סווגו את נקודות האי-רציפות שלה (סליקה, מין ראשון, מין שני).

II. (5 נקודות) חשבו את הגבול הבא, או הוכיחו שאינו קיים: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

נמקו היטב כל צעד בתשובתכם!

שאלה 3 (22 נקודות)

- א. (12 נקודות) הוכיחו שלכל $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים: $\tan x \geq x$.
- ב. (10 נקודות) תהי f פונקציה ממשית גזירה, וניח ש- f' רציפה ב- \mathbb{R} . נתון ש-
 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1$. הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0, 2)$ המקיימת:
 $f'(c) = \frac{11}{17}$

שאלה 4 (14 נקודות – 7 נקודות לכל סעיף)

- א. הוכיחו שהסדרה הבאה היא מונוטונית: $a_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$.
- ב. מצאו את הגבול הבא אם קיים, ואחרת הוכיחו שאינו קיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^n}{(5n)^n}$.

שאלה 5 (14 נקודות – 7 נקודות לכל סעיף)

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

ב. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln 2n}$

שאלת בונוס (10 נקודות)

תהי f פונקציה ממשית הרציפה בכל נקודה ב- \mathbb{R} . הוכיחו:

קיים פתרון למשוואה $f(x) = x$ אם ורק אם קיים פתרון למשוואה $f(f(x)) = x$.

[שימו לב! יש להוכיח מנימוקים מתמטיים בלבד! אי אפשר להוכיח בציורים ו/או בדוגמאות. נימוקים בסגנון "לפי ההגיון מתקיים כך וכך" לא יתקבלו!]

בהצלחה!