

הרצאה 16

פונקציה סתומה Implicit Function

$$ax + by = 0$$

$$F(x, y) := ax + by = 0$$

$$y = -\frac{a}{b}x =: \varphi(x) ; b \neq 0$$

$$ax = 0 ; b = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = b$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

סימון

נסמן:

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$$(x, y) \in \begin{matrix} x \in & y \in \end{matrix}$$

משפט

$F: W \rightarrow \mathbb{R}; F \in C^r(W)$ נתונה. $W \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ תהי

נתונה הנקודה $(a, b) \in W$ כך ש $F(a, b) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

אזי קיימות סביבות U ו V של a ו b בהן

קיים ויחיד

$$\forall x \in U \exists! y \in V F(x, y) = 0$$

$$\varphi \in C^r(U) \text{ ו } y = \varphi(x) \quad \varphi: U \rightarrow V$$

הוכחה

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 ; \text{ WLOG } \frac{\partial F}{\partial y} > 0$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y} \text{ רציפה ב } (a, b) \text{ ולכן}$$

$$\exists B_{(a,b)}(\epsilon) : \forall (x, y) \in B_{(a,b)}(\epsilon) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$$

סביבות $U' \times V' \subset B_{(a,b)}(\epsilon)$ כך ש $\exists U' \ni a, V' \ni b$

בפרט $\frac{\partial F}{\partial y}(a, y) > 0$ כלומר $\nearrow F(a, y)$ ממש (לפי y).

$$V' = (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

$$y = b : F(a, b) = 0$$

$$y = b + \epsilon : F(a, b + \epsilon) > 0$$

$$y = b - \epsilon : F(a, b - \epsilon) < 0$$

$\exists U'' \ni a : F(x, b + \epsilon) > 0 \forall x \in U''$ ולכן רציפה ולכן $F(x, b + \epsilon)$

$\exists U''' \ni a : F(x, b - \epsilon) < 0 \forall x \in U'''$ ולכן רציפה ולכן $F(x, b - \epsilon)$

נגדיר

$$U := U' \cap U'' \cap U'''$$

נקבע $x \in U$

לפי הבניה $F(x, b - \epsilon) < 0, F(x, b + \epsilon) > 0$

$F(x, y) - F(x, b)$ רציפה לפי y אם x קבוע.

$\exists y : F(x, y) = 0$ ולכן לפי משפט קושי על ערך בינוני $F(x, b - \epsilon) < 0, F(x, b + \epsilon) > 0$

אבל $F(x, *) \nearrow$ ולכן y הוא יחיד.

$$y \in (b - \epsilon, b + \epsilon) = V ; y = \varphi(x), x \in U$$

(1) צ"ל φ רציפה בנקודה (a, b) , כלומר צ"ל:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(a, \delta) \subset U : \varphi(x) \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

ניקח $U \times (b - \epsilon, b + \epsilon) \subset U'$ ולפי הבניה

$$x \in U' \Rightarrow y \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

$$U' = B(a, \delta)$$

$$y = \varphi(x)$$

$$\forall x \in B(a, \delta) \Rightarrow \varphi(x) \in (\varphi(a) - \epsilon, \varphi(a) + \epsilon)$$

ולכן φ רציפה.

$$\varphi \in C^r(U) \quad (2)$$

נכתוב נוסחת טיילור ל F בנקודה (a, b) עם סדר 0 עם שארית *Lagrange*.

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = F(a, b) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(y - b)$$

עבור $\xi = (a, b) + \theta((x, y) - (a, b)) ; 0 < \theta < 1$

$$y = \varphi(x); b = \varphi(a)$$

$$F(a, b) = 0$$

$$x \in U \ni a; F(x, \varphi(x)) = 0$$

$$0 = 0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(\varphi(x) - \varphi(a))$$

$$x = (a_1, a_2, \dots, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)(x_k - a_k) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a))$$

$$\frac{\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_k}(x), \frac{\partial F}{\partial y}(\xi) \neq 0 \forall |x - a| < \delta$$

$$x \rightarrow a \Rightarrow \varphi(x) \rightarrow b = \varphi(a)$$

$$(x, \varphi(x)) - (a, b) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

ולכן $\xi \xrightarrow{x \rightarrow a} (a, b)$

$$\frac{\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a + \theta(x - a), b + \theta(\varphi(x) - b))}{\frac{\partial F}{\partial y}(a + \theta(x - a), b + \theta(\varphi(x) - b))}$$

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

$$\exists \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \forall x \in U_a, y \in V_b$$

אז לכן אפשר להחליף $(x, \varphi(x))$ ל (a, b)

ולכן

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad x \in U_a \quad k=1, \dots, n}$$

$\varphi \in C^r(U)$?

φ רציפות ולכן $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))$ רציפה ב U

ולכן $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)$ רציפות ולכן $\varphi \in C^1(U)$; $x \in U, k = 1, \dots, n$

נניח כי $\varphi \in C^k(U)$: $k < r$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial y}, \varphi \in C^k(U) \Rightarrow - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \in C^k(U)$$

ולכן

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in C^k(U) \quad k = 1, \dots, n \Rightarrow \varphi \in C^{k+1}(U)$$

ולכן לפי אינדוקציה $\varphi \in C^r(U)$

גזירות של פונקציה סתומה

$$F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} : \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

אלגוריתם:

$$F(a, b) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \quad (2)$$

↓

$$y = \varphi(x), x \in U_a$$

תרגיל

$$z^3 - xz + y = 0$$

$$x = 3, y = -2, z = z(x, y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3, -2) = ? \quad (2)$$

$$F(x, y, z) = z^3 - xz + y = 0 \quad (1)$$

$$F(3, -2, 2) = 8 - 6 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x \Big|_{\substack{x=3 \\ y=-2 \\ z=2}} = 3 * 4 - 3 = 9 \neq 0 \quad (2)$$

ולכן קיימת פונקציה יחידה $z = z(x, y) \in C^\infty(U \times V)$

$$(3, -2) \in U ; v = (2 - \epsilon, 2 + \epsilon) ; z(3, -2) = 2$$

$$z(x, y)^3 - xz(x, y) + y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} : 3z^2 z'_x - z - xz'_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : 3z^2 z'_y - xz'_y + 1 = 0$$

$$3 * 4 * z'_x(3, -2) - 2 - 3z'_x(3, -2) = 0 \Rightarrow z'_x(3, -2) = \frac{2}{9}$$

$$3 * 4 * z'_y(3, -2) - 3z'_y(3, -2) + 1 = 0 \Rightarrow z'_y(3, -2) = -\frac{1}{9}$$