לינארית 2 תשפ"ג סמסטר ב מועד א

מרצים: ד"ר עדי בן צבי, אריאל ויצמן.
מתרגלים: אריאל ויצמן, נעה כהן, כנה נהיר, אלעד עטייא, ניר שרייבר.
יש לענות על **כל** שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 104 נק'. אין חומר עזר.
זמן הבחינה: 3 שעות.
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר. יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. (15 נק') הוכיחו את משפט ההצגה של ריס: יהי V ממ"פ מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהא $T : V \to \mathbb{F}$ הע"ל. הוכיחו שקיים $\overrightarrow{a} \in V$ יחיד כך ש:

$$\forall v \in V : T(v) = \langle v, \overrightarrow{a} \rangle$$

2.

(א) (8 נק') נתבונן במרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}^3$ עם המ"פ הבאה (אין צורך להוכיח שזו מ"פ):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$$

נסמן $W = sp\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. מצאו את ההיטל של $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על W.

(ב) (6 נק') יהי V ממ"פ, יהי $W \leq V$ ת"מ, ויהי $v \in V$. נסמן:

$$u = \pi_W(v)$$

כלומר, u הוא ההיטל של v על W. חשבו את $\pi_{W^\perp}(u)$ (ההיטל של u על $W^\perp$).

3. אין קשר בין הסעיפים הבאים (7 נק' לכל סעיף):

(א) יהיו $x, y, z, w \geq 0$ ממשיים כך ש $x + y + z + w = 4$. מצאו את:

$$\max\left\{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{w}\right\}$$

(ב) האם המטריצה הבאה לכסינה? נמקו היטב:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$$

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם $\lambda \neq 0$ ע"ע של $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אז λ^2 ע"ע של AA^t.

4. תהא $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ כך ש

$$\forall i,j : A_{i,j} \in \mathbb{R}$$

המקיימת: $\text{rank}(A) = 3$, המטריצה $A - (1+i)I$ לא הפיכה, וגם $tr(A) = 0$.

(א) (10 נק') מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A (עד כדי סדר הבלוקים).

(ב) (8 נק') נגדיר פולינום

$$f(x) = x^2 - 9x + 20$$

האם המטריצה $f(A)$ הפיכה? נמקו היטב.

5. נתבונן בממ"פ $\mathbb{C}^n$ עם המ"פ הסטנדרטית (כלומר, $\langle v,u\rangle = v^t\overline{u}$ או במילים אחרות: $\langle v,u\rangle = \sum_{k=1}^n v_k \cdot \overline{u_k}$).

(א) (6 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו: $A + A^*$ הרמיטית.

(ב) (8 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Av, v\rangle = 0$$

הוכיחו: A נילפוטנטית.

(ג) (10 נק') הוכיחו שאם $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Mv, v\rangle = 0$$

אז $M = 0$.

(ד) (12 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Av, v\rangle = 0$$

הוכיחו: $A = 0$.

בהצלחה!!

שאלה 1: (15 נק') הוכיחו את משפט ההצגה של ריס: יהי V ממ"פ מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהא $T : V \to \mathbb{F}$ הע"ל. הוכיחו שקיים $\overrightarrow{a} \in V$ יחיד כך ש:

$$\forall v \in V : T(v) = \langle v, \overrightarrow{a} \rangle$$

<u>פתרון שאלה 1:</u>

המשך פתרון שאלה 1

שאלה 2:

א. (8 נק') נתבונן במרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^3$ עם המ"פ הבאה (אין צורך להוכיח שזו מ"פ):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$$

נסמן $W = sp\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. מצאו את ההיטל של $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על W.

ב. (6 נק') יהי V ממ"פ, יהי $W \leq V$ ת"מ, ויהי $v \in V$. נסמן:

$$u = \pi_W(v)$$

כלומר, u הוא ההיטל של v על W. חשבו את $\pi_{W^\perp}(u)$ (ההיטל של u על $W^\perp$).

פתרון שאלה 2:

המשך פתרון שאלה 2

<u>שאלה 3:</u> אין קשר בין הסעיפים הבאים (7 נק' לכל סעיף):

א. יהיו $x,y,z,w \geq 0$ ממשיים כך ש $x+y+z+w=4$. מצאו את:

$$\max\left\{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{w}\right\}$$

ב. האם המטריצה הבאה לכסינה? נמקו היטב:

$$A=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{10\times 10}$$

ג. הוכיחו/הפריכו: אם $\lambda \neq 0$ ע"ע של $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אז λ^2 ע"ע של AA^t.

<u>פתרון שאלה 3:</u>

המשך פתרון שאלה 3

המשך פתרון שאלה 3

שאלה 4: תהא $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ כך ש

$$\forall i,j : A_{i,j} \in \mathbb{R}$$

המקיימת: $\text{rank}(A) = 3$, המטריצה $A - (1+i)I$ לא הפיכה, וגם $tr(A) = 0$.

א. (10 נק') מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A (עד כדי סדר הבלוקים).

ב. (8 נק') נגדיר פולינום

$$f(x) = x^2 - 9x + 20$$

האם המטריצה $f(A)$ הפיכה? נמקו היטב.

פתרון שאלה 4:

המשך פתרון שאלה 4

המשך פתרון שאלה 4

שאלה 5: נתבונן בממ"פ $\mathbb{C}^n$ עם המ"פ הסטנדרטית (כלומר, $\langle v,u\rangle = v^t\overline{u}$ או במילים אחרות: $\langle v,u\rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \overline{u_k}$).

א. (6 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו: $A + A^*$ הרמיטית.

ב. (8 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Av, v\rangle = 0$$

הוכיחו: A נילפוטנטית.

ג. (10 נק') הוכיחו שאם $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הרמיטית המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Mv, v\rangle = 0$$

אז $M = 0$.

ד. (12 נק') תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : \langle Av, v\rangle = 0$$

הוכיחו: $A = 0$.

פתרון שאלה 5:

המשך פתרון שאלה 5

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___