

אלגברה לינארית למורים- פתרון תרגיל 6

פתרון שאלה 1

מצאו את המטריצות ההופכיות של המטריצות הבאות ובדקו את התשובה שלכם:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} .1$$

פתרון

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & | & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 : R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

$$\rho_2 : -0.5R_2 \rightarrow R_2$$

$$\rho_3 : R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = I$$

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.2$$

פתרון

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{3}{4}R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 + \frac{2}{3}R_3 \rightarrow R_2 \\ R_1 + R_3 \rightarrow R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-R_1 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

פתרון שאלה 2

$$\rho_1 : R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1$$

$$\rho_2 : R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\rho_3 : 0.5R_3 \rightarrow R_3$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = I$$

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$