

פתרון מבחן מועד א' – חדו"א 2 לאודיסאה- 86-148 – 27/07/25

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

1. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל $f(x)$.

נתחיל מהטור הידוע של האקספוננט, ונפתח משם:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$e^{2x} - 1 - 2x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

לכל $x \neq 0$ אפשר לחלק ב x ולקבל

$$\frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^n}{x \cdot n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n x^{n-1}}{n!} = \frac{4}{2}x + \frac{8}{3!}x^2 + \dots$$

לבסוף, נשים לב שאם נציב $x = 0$ בטור נקבל אפס ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n x^{n-1}}{n!}$$

ב. חשבו את $f^{(10)}(0)$.

המקדם של x^{10} בטור מתקבל כאשר $n = 11$ שהרי הביטוי הוא:

$$\frac{2^{11} x^{10}}{11!}$$

אבל המקדמים של הטור חייבים להיות מקדמי טיילור ולכן

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{2^{11}}{11!}$$

$$f^{(10)}(0) = \frac{10!}{11!} 2^{11} = \frac{2^{11}}{11}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

א. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בכל הממשיים.

ראשית נחשב את פונקצית הגבול. כאן x הוא פרמטר קבוע ואילו $n \rightarrow \infty$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nx}$$

כאן נחלק למקרים:

אם $x = 0$ נקבל את הסדרה הקבועה 1 ואם $x \neq 0$ אזי $|nx| \rightarrow \infty$ ולכן הגבול הוא אפס.

כלומר סה"כ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

כיוון שפונקצית הגבול אינה רציפה, ואילו הפונקציות בסדרה רציפות בקטע $[0, \infty)$, לו הייתה התכנסות במ"ש בכל הממשיים, הייתה התכנסות במ"ש ב $[0, \infty)$ היינו מקבלים סתירה.

(שהרי סדרת פונקציות רציפות המתכנסת במ"ש, מתכנסת לפונקצית גבול רציפה.)

לכן סה"כ אין התכנסות במ"ש בקטע.

הערה: אפשר להוכיח זאת גם בעזרת סדרת החסמים:

$$d_n = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$$

כעת

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{1+nx} - 0 \right| = 1$$

ולכן $d_n \geq 1$, ולכן $d_n \not\rightarrow 0$ כלומר אין התכנסות במ"ש בקטע הנתון.

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע $[1, \infty)$.

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{[1, \infty)} \left| \frac{1}{1+nx} - 0 \right| \stackrel{\text{הסבר למטה}}{=} \frac{1}{1+n}$$

כיוון ש $\frac{1}{1+nx}$ פונקציה מונוטונית יורדת בקטע $[1, \infty)$ (המכנה גדל, הביטוי קטן), המקסימום מתקבל בקצה השמאלי.

כעת $d_n \rightarrow 0$ ולכן יש התכנסות במ"ש בקטע זה.

3. תהי פונקציה דיפרנציאבילית בעלת נגזרות חלקיות חיוביות תמיד: $u_x(x, y), u_y(x, y) > 0$

א. עבור איזה ערך של t מתקבל הערך המינימלי של הביטוי $u(t^2, t^2)$? הוכיחו תשובתכם.

שואלים אותנו על הפונקציה

$$h(t) = u(t^2, t^2)$$

נגזור בעזרת כלל השרשרת:

$$h'(t) = u_x(t^2, t^2) \cdot 2t + u_y(t^2, t^2) \cdot 2t = 2t \underbrace{(u_x(t^2, t^2) + u_y(t^2, t^2))}_{>0}$$

לכן הנגזרת חיובית בתחום $(0, \infty)$ ושלילית בתחום $(-\infty, 0)$ כלומר הפונקציה יורדת בתחום $(-\infty, 0]$ ועולה בתחום $[0, \infty)$

לכן הערך המינימלי מתקבל עבור $t = 0$.

ב. הוכיחו או הפריכו: $u(x, y)$ אינה חסומה.

הפרכה: נביט בפונקציה

$$u(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y)$$

פונקציה זו חסומה בערך מוחלט על ידי π כיוון ש $\arctan$ חסומה בערך מוחלט על ידי $\frac{\pi}{2}$.

הנגזרות החלקיות חיוביות תמיד:

$$u_x = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_y = \frac{1}{1+y^2}$$

4. נביט בפונקציה $f(x, y) = (1 + e^y) \cos(x) - ye^y$

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

משוואת המישור המשיק באופן כללי היא

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

נחשב את הנגזרות החלקיות ונציב, וזו השאלה הקלה ביותר בעולם:

$$f_x = -(1 + e^y) \sin(x)$$

$$f_y = e^y \cos(x) - (e^y + ye^y)$$

ולכן

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 1 - 1 = 0, \quad f(0, 0) = 2$$

ומשוואת המישור המשיק היא

$$z - 2 = 0$$

ב. מצאו וסווגו את הנקודות החשודות לקיצון מקומי, חלקו למקרים.

ראשית נמצא את הנקודות החשודות בהן הגרדיאנט מתאפס, כלומר שתי הנגזרות החלקיות מתאפסות.

$$f_x = 0 \text{ אם ורק אם } \sin(x) = 0 \text{ כלומר } x = \pi k \text{ עבור } k \in \mathbb{Z}$$

$$f_y = 0 \text{ אם ורק אם}$$

$$e^y \cos(x) - (e^y + ye^y) = 0$$

$$e^y(\cos(x) - 1 - y) = 0$$

$$\cos(x) - (1 + y) = 0$$

$$y = \cos(x) - 1$$

נשים לב כי $\cos(\pi k) = (-1)^k$ ונשתמש בכך בהמשך לנוחות הרישום.

כלומר כל הנקודות החשודות הן

$$(\pi k, \cos(\pi k) - 1) = (\pi k, (-1)^k - 1)$$

כעת נחשב את $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$

$$f_{xx} = -(1 + e^y) \cos(x)$$

$$f_{yy} = e^y(\cos(x) - 1 - y) - e^y = e^y(\cos(x) - y - 2)$$

$$f_{xy} = -e^y \sin(x)$$

ולכן

$$\Delta(\pi k, (-1)^k - 1) = -\left(1 + e^{(-1)^k - 1}\right)(-1)^k \cdot e^{(-1)^k - 1} \underbrace{\left((-1)^k - ((-1)^k - 1) - 2\right)}_{=-1} - 0 =$$

כלומר הסימן של Δ נקבע על פי $(-1)^k$

אם k אי זוגי הסימן שלילי, ולכן מדובר בנקודת אוקף.

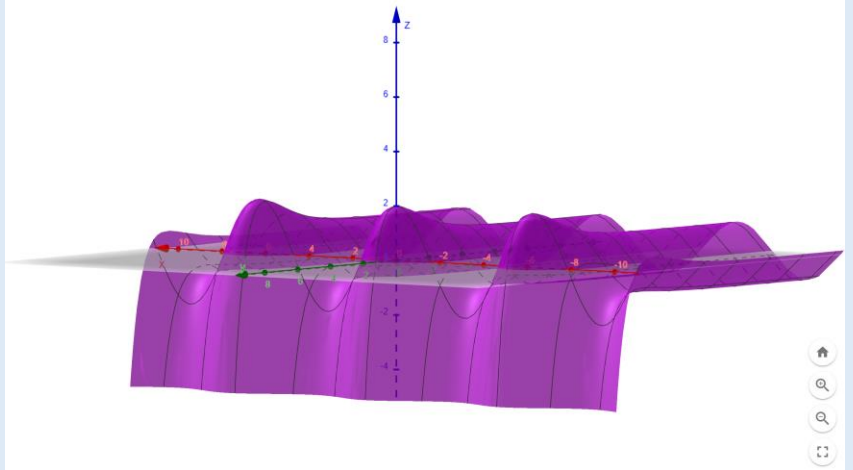
$$(\pi k, (-1)^k - 1) = (\pi k, -2)$$

אם k זוגי אזי מדובר בקיצון מקומי. נבדוק את הסימן של f_{xx} עבור k

$$f_{xx}(\pi k, (-1)^k - 1) = f_{xx}(\pi k, 0) = -(1 + e^0) \cos(\pi k) = -2(-1)^k = -2 < 0$$

ולכן מדובר בנקודות מקסימום מקומיות.

שרטוט להמחשה:



5. עמית ומכנס הקימו בניין לרכז את פעילות ההתנגדות לשיינר. בסיס הבניין הוא $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ וגובה התקרה נתון ע"י הפונקציה $f(x, y) = x + 2$. כמו כן צפיפות הקירות נתונה ע"י הפונקציה $g(x, y, z) = 5 - z$.
א. חשבו את נפח הבניין

נפח הבית הוא האינטגרל הכפול

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r \cos(\theta) + 2) r d\theta \right) dr$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{2\pi} (r \cos(\theta) + 2) r d\theta = [r^2 \sin(\theta) + 2r\theta]_0^{2\pi} = 2r \cdot 2\pi = 4\pi r$$

וכעת הנפח כולו הוא

$$\int_0^1 4\pi r dr = \left[\frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi$$

ב. חשבו את המסה של קירות הבניין.

קירות הבית הם כמובן משטח, ולכן על מנת לחשב את המסה שלהם יש לחשב אינטגרל משטחי מסוג ראשון של פונקצית הצפיפות.

אם נסמן את משטח הקירות ב- M אזי אנחנו מחפשים בעצם את האינטגרל המשטחי

$$\iint_M g(x, y, z) dS$$

כעת עלינו למצוא פרמטריזציה של M על מנת לחשב את האינטגרל

$$\vec{s}(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

כאשר $\theta \in [0, 2\pi]$ היא הזווית מסביב לבית, והגובה הוא בתחום

$$0 \leq z \leq \cos(\theta) + 2$$

(הרי הגובה המקסימלי מעל הנקודה (x, y) הוא $f(x, y) = x + 2$).

נסמן את התחום של הפרמטרים ב

$$U = \left\{ (\theta, z) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \cos(\theta) + 2 \end{array} \right\}$$

לכן מסת הקירות היא

$$\iint_M g(x, y, z) dS = \iint_U g(\cos(\theta), \sin(\theta), z) \cdot |\vec{s}_\theta \times \vec{s}_z| d\theta dz$$

נחשב את המכפלה הוקטורית

$$\vec{s}_\theta \times \vec{s}_z = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

$$|\vec{s}_\theta \times \vec{s}_z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$$

ולכן מסת הקירות היא

$$\iint_U (5 - z) d\theta dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\cos(\theta)+2} (5 - z) dz \right) d\theta$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\begin{aligned} \int_0^{\cos(\theta)+2} (5 - z) dz &= \left[5z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{\cos(\theta)+2} = 5 \cos(\theta) + 10 - \frac{(\cos(\theta) + 2)^2}{2} - 0 = \\ &= -\frac{\cos^2(\theta)}{2} + 3 \cos(\theta) + 8 \end{aligned}$$

נחשב את האינטגרל החיצוני של כל אחד משלושת הביטויים

$$\int_0^{2\pi} 3 \cos(\theta) d\theta = [3 \sin(\theta)]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} 8 d\theta = 16\pi$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

ולכן

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

סה"כ מסת הקירות היא

$$16\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{31}{2}\pi$$

*לאחר קריאת פתרון זה, עדי מכנס האיץ את תוכניות הבנייה.

6. נסמן ב- M את התקרה של הבניין שעמית ומכנס הקימו בשאלה הקודמת. גשם זלעפות החל לרדת על גג הבניין, והכוח שהגשם הפעיל בכל נקודה נתון ע"י השדה הוקטורי

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z - 5)$$

חשבו את השטף של פגיעת הגשם בתקרה, כלומר האינטגרל המשטחי מסוג שני

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

כאשר הנורמל מכון כלפי פנים הבניין.

הפעם יש לנו אינטגרל משטחי מסוג שני, על משטח התקרה של הבניין.

נמצא פרמטריזציה של התקרה:

$$\vec{s}(x, y) = (x, y, x + 2), \quad (x, y) \in D$$

כאשר D הוא מעגל היחידה מהשאלה הקודמת.

לכן

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F}(\vec{s}(x, y)) \cdot (\pm \vec{s}_x \times \vec{s}_y) dx dy$$

נחשב את המכפלה הוקטורית, ונבחר את הכיוון הנכון של הנורמל

$$\vec{s}_x \times \vec{s}_y = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 0, 1)$$

כיוון שאנחנו רוצים את הנורמל לכיוון פנים הבית, ציר ה- z צריך להיות שלילי וניקח את $(1, 0, -1)$

סה"כ השטף הוא

$$\iint_D \vec{F}(\vec{s}(x,y)) \cdot (\pm \vec{s}_x \times \vec{s}_y) dx dy = \iint_D (0,0,(x+2)-5)(1,0,-1) dx dy =$$

$$= \iint_D (3-x) dx dy \stackrel{\text{קוטביות}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (3-r \cos(\theta)) r d\theta \right) dr$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{2\pi} (3r - r^2 \cos(\theta)) d\theta = [3r\theta - r^2 \sin(\theta)]_0^{2\pi} = 6\pi r$$

ולכן נקבל כי השטף הוא

$$\int_0^1 6\pi r dr = [3\pi r^2]_0^1 = 3\pi$$

טורי טיילור

מקדמי טיילור וטורים ידועים

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

גזירות בשני משתנים

דיפרנציאביליות

הפונקציה $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0) אם

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+a, y+b) - f(x, y) - f_x(x, y) \cdot a - f_y(x, y) \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

משוואת מישור משיק

נוסחא כללית לחישוב מישור משיק לפונקציה הגזירה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0, z_0) כאשר $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

גרדיאנט ונגזרת כיוונית

הגרדיאנט של הפונקציה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) הוא

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

נגזרת הכיוונית של הפונקציה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) בכיוון $\vec{v}$ היא

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

כלל השרשרת

תהי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ותהיינה $x(t), y(t)$ גזירות. נביט בפונקציה המורכבת $h(t) = f(x(t), y(t))$ אזי

$$h'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

קיצון מקומי ומוחלט

נקודות חשודות (קריטיות) לקיצון מקומי

נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (0, 0)$$

מבחן הנגזרת השנייה

לכל נקודה חשודה נבצע את התהליך הבא:

1. נחשב את $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$

2. אם $\Delta(x, y) < 0$ מדובר בנקודת אוקף, כלומר נקודה חשודה שאינה קיצון מקומי

3. אם $\Delta(x, y) > 0$ מדובר בקיצון מקומי

א. אם $f_{xx}(x, y) > 0$ מדובר במינימום מקומי

ב. אם $f_{xx}(x, y) < 0$ מדובר במקסימום מקומי

מציאת קיצון מוחלט

בהנתן פונקציה $f(x, y)$ ותחום D נרצה למצוא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של $f(x, y)$ כאשר $(x, y) \in D$.

1. נאסוף נקודות חשודות מפנים התחום, אלה נקודות בתחום בהן הגרדיאנט מתאפס.

2. נאסוף נקודות חשודות משפת התחום באמצעות כופלי לגראנז':

א. נתאר את שפת התחום D ע"י המשוואה $g(x, y) = 0$

ב. נפתור את מערכת המשוואות בשלושת הנעלמים (x, y, λ)

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ג. לכל פתרון (x, y, λ) הנקודה (x, y) היא נקודה חשודה על הקצה

3. נאסוף נקודות חשודות משפת התחום עבורן $g(x, y) = 0$ וכן $\nabla g(x, y) = (0, 0)$.

4. נציב את כל הנקודות החשודות משני הסעיפים הקודמים בפונקציה, ונראה מה הכי גבוה ומה הכי נמוך.

אינטגרלים במישור ובמרחב

אינטגרלים כפולים

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על D כרצפה, ועל f כגובה התקרה, והאינטגרל $\iint_D f dx dy$ מייצג את נפח הבית.

כמו כן, אפשר לחשוב על D כמשטח, ועל f כצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של המשטח.

בנוסף, $\iint_D 1 dx dy$ הוא השטח של התחום D .

חישוב אינטגרלים כפולים

אם

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

אזי

$$\iint_D f dx dy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

שינוי קואורדינטות על אינטגרלים כפולים

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y) \in D \quad (u, v) \in D'$$

אזי

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| du dv$$

קואורדינטות קוטביות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$(x, y) \in D \quad (r, \theta) \in D'$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

אינטגרלים משולשים

יהי תחום $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על V כאובייקט תלת מימדי, ועל f כצפיפות בכל נקודה, והאינטגרל $\iiint_V f dx dy dz$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iiint_V 1 dx dy dz$ הוא הנפח של התחום V .

חישוב אינטגרלים משולשים

אם

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

וכן

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

אזי

$$\iiint_V f dx dy dz = \iint_D \left(\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

שינוי קואורדינטות

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y, z) \in V \quad (u, v, w) \in V'$$

אזי

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

קואורדינטות גליליות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, z) \in V'$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \cdot r dr d\theta dz$$

קואורדינטות כדוריות

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, \varphi) \in V'$$

$$\iiint_V f dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

אינטגרלים קווים מסוג ראשון במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור שפה על הרצפה, ועל f כגובה הקירות, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את שטח הקירות.

כמו כן, אפשר לחשוב על C בתור חבל על הרצפה, ועל f כצפיפות החבל בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, $\int_C 1 dr$ הוא אורך המסילה.

חישוב אינטגרלים קווים מסוג ראשון במישור

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה C

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

אינטגרלים קווים מסוג ראשון במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור חבל במרחב ועל f בתור הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, האינטגרל $\int_C 1 dr$ הוא האורך של המסילה.

חישוב אינטגרלים קווים מסוג ראשון במרחב

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול על הרצפה, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, ואז $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה שנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי פרמטריזציה של C

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול במרחב, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, אז האינטגרל $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה הנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי פרמטריזציה של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

סימון נוסף לאינטגרלים קוויים מסוג שני

$$\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$$

והפרמטריזציה של המסילה היא

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

אזי נסמן

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$$

כאשר

$$\int_C P dx = \int_a^b P(\vec{r}(t)) \cdot x'(t) dt$$

$$\int_C Q dy = \int_a^b Q(\vec{r}(t)) \cdot y'(t) dt$$

משפט גרין

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ בעל השפה C ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ בעל נגזרות רציפות. אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של $\vec{F}$ מסביב ל- C נגד כיוון השעון שווה לאינטגרל הכפול של $\text{curl}(\vec{F})$ על התחום D .

נסמן

$$\vec{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

אזי

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{curl}(\vec{F}) dx dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ אפשר לחשוב על M כאובייקט משטחי ועל f כפונקציית הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\iint_M f dS$ מייצג את המסה של האובייקט. בנוסף, $\iint_M 1 dS$ מייצג את שטח הפנים של המשטח.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M f dS = \iint_D f(\vec{s}(u, v)) \cdot |\vec{s}_u \times \vec{s}_v| du dv$$

אינטגרלים משטחיים מסוג שני

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ויהי כיוון לנורמל למשטח. אפשר לחשוב על המשטח בתור ממברנה ועל השדה הוקטורי בתור עוצמת הזרימה, אז האינטגרל $\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ הוא סך כל הזרימה דרך הממברנה בכיוון הנורמל הנתון.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}(\vec{s}(u, v)) \cdot (\vec{s}_u \times \vec{s}_v) du dv$$

כאשר הסימן נקבע על ידי בחירת וקטור הנורמל $\vec{s}_u \times \vec{s}_v$ בכיוון הנתון.

משפט גאוס (דיברגנץ)

יהי גוף תלת מימדי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל משטח מעטפת M ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, ונביט בנורמל כלפי חוץ הגוף, אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz$$

משפט סטוקס

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל שפה C ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, אזי האינטגרל הקווי נגד כיוון השעון כאשר הלמעלה הוא לפי הנורמל למשטח מקיים:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$