<u>פיתרון תרגיל בית 1</u>

1. הואיל ויש החזרה, מצב זה מקביל ל-4 ניסיונות כאשר בכל ניסיון יש 2 תוצאות אפשריות (שחור או לבן). סה"כ: $2^4=16$.

2. נתייחס ל-k הספרים שצריכים להיות אחד ליד השני כאילו הם ספר אחד. במצב זה יש לנו $(n-k+1)!$ אפשרויות סידור. יש להכפיל זאת באפשרויות הסידור הפנימי של k הספרים.
סה"כ: $(n-k+1)!\cdot k!$.

3. הואיל ואין החזרה (לא ייתכן שאותו אדם גם יושב ראש וגם סגן), ויש חשיבות לסדר (הראשון יו"ר, השני סגן וכו'), יש לבחור 3 נציגים ולסדר את התפקידים ביניהם סה"כ:

$$\binom{120}{3}\cdot 3!=\frac{120!}{(120-3)!}=120\cdot 119\cdot 118=1685040$$

4. כאשר מרכיבים מספר בן 4 ספרות ישנם 10 ספרות שונות (0 עד 9) שניתן לשים באחד מתוך 4 מקומות. כלומר זוהי סדרה של 4 ניסיונות כאשר לכל ניסיון יש 10 תולדות אפשריות (10^4).
אבל המספר 0 יכול להופיע רק פעם אחת. על כן יש לנו שני מצבים אפשריים:
   א. המספר 0 לא הופיע כלל, במצב זה ישנן 9 ספרות שונות שניתן להציב ב-4 מקומות.
   סה"כ: $9^4=6561$ אפשרויות.
   ב. המספר 0 הופיע פעם אחת. במצב זה יש לנו 3 ניסיונות עם 9 תולדות אפשריות (למספרים 1 עד 9 כולל) כאשר במקום הרביעי כבר נקבע שנשים את המספר 0.
   בנוסף, יש לזכור להכפיל את מספר הסידורים האפשריים לשים את ה-0 באחד מ-4 המקומות. סה"כ: $9^3\cdot\binom{4}{1}=729\cdot 4=2916$

לסיכום, נחבר את כלל האפשרויות של שני המצבים: $6561+2916=9477$

5. כדי שיהיה ייצוג לשני המינים חייבים שיהיו לפחות בן אחד (מתוך n-k) ובת אחת (מתוך k) בוועד. נניח (נשכח בשאלה) $r<\min(k,n-k)$
הוועד מכיל $1\le t\le k$ בנות ו- $1\le r-t$ בנים $\binom{k}{t}\cdot\binom{n-k}{r-t}$

סה"כ $\sum_{t=1}^{r-1}\binom{k}{t}\cdot\binom{n-k}{r-t}$

6. כדי לפתור את השאלה הזאת יש להתקדם בשלבים.

א. נתייחס לשחר דליה ואמיר כאיבר אחד שצריך לסדר סביב שולחן עגול יחד עם שאר האנשים שיש לסדר בתשעת המקומות הנותרים. במקרה הזה יש לנו $(10-1)!\cdot 2 = 725760$ הכפלנו ב2 הואיל ובתנאי השאלה ישנם רק שני סידורים אפשריים לשלישיה של שחר דליה ואמיר (שחר-דליה-אמיר / אמיר-דליה-שחר).

ב. נבדוק כמה סידורים אסורים אפשריים. רונן וקובי לא מוכנים לשבת אחד ליד השני. כך שאנחנו צריכים דווקא לסדר את רונן וקובי צמוד ואנחנו נתייחס אליהם גם כאיבר אחד. גם במקרה זה ישנם רק 2 סידורים פנימיים אפשריים (רונן-קובי / קובי-רונן). כעת, אנחנו צריכים לסדר סביב שולחן עגול 7 אנשים ועוד איבר "רונן-קובי" (בעל 2 סידורים פנימיים אפשריים) ועוד איבר "שחר-דליה-אמיר" (בעל 2 סידורים פנימיים אפשריים). סה"כ סידורים אסורים: $(9-1)!\cdot 2\cdot 2=161280$.

ג. נחסיר את הסידורים האסורים מסך הסידורים שחישבנו בשלב הראשון: סה"כ סידורים אפשריים: $725760-161280=564480$

7. הסוחר מוציא מטבעות בלי החזרה. כמו כן אין חשיבות לסדר הוצאת המטבעות. לכן המקרה שלפנינו הוא מקרה של צירופים ללא החזרה.

סך כל האפשרויות להוצאת תת-קבוצה של 3 מטבעות מתוך $r+s+t$ הוא $\binom{r+s+t}{3}$.

עתה את קבוצת האפשרויות X ניתן לחלק ל – 3 מיקרים זרים:

A = { 3 מטבעות נחושת}

B = { 3 מטבעות אלומיניום }

C = { 3 מטבעות זהב }

$X = A \cup B \cup C$. האיחוד זר כמובן. לכן מנוסחאת ההכלה וההדחה נקבל ש

$$|X| = |A| + |B| + |C|$$

$|A|$: מספר הצירופים של 3 מטבעות נחושת מ- r ללא החזרה הוא $\binom{r}{3}$.

$|B|$: מספר הצירופים של 3 מטבעות אלומיניום מ- s ללא החזרה הוא $\binom{s}{3}$.

$|C|$: מספר הצירופים של 3 מטבעות זהב מ- t ללא החזרה הוא $\binom{t}{3}$

לכן נקבל סה"כ $\binom{r}{3}+\binom{s}{3}+\binom{t}{3}$ אפשרויות.

8. א. $7!$.

ב. סידור פנימי לדני ורמי ואחר-כך, כאשר מתייחסים אליהם כאל יחידה אחת, יש $6 = 1 - 7$ יחידות לסידור. לכן בסך הכל יש $6!\,2!$ סידורים.

ג. יש לבחור את אחד משני הקצוות עבור דני ויש לסדר את 5 התלמידים שאינם דני ורמי בחמשת המקומות שאינם בקצה. לכן יש $5!\,2!$ סידורים.

ד. יש לבחור את אחד מתוך ארבעת זוגות המקומות האפשריים לשניהם. יש לבחור להם את אחד מתוך שני הסידורים הפנימיים האפשריים. אחר-כך יש לסדר את חמשת האחרים בחמשת המקומות הנותרים ששניים מהם הם בין רמי ודני. לכן בסך הכל יש $4 \cdot 2 \cdot 5!$ סידורים אפשריים.

או הסבר אחר : יש לקבוע מי מהשניים ישב משמאל לאחר. יש לבחור מי השניים האחרים שישבו בינהם ויש לסדר את השניים האלה. זה קובע גוש של ארבעה תלמידים. בנוסף יש עוד שלושה תלמידים שלא ישבו בין דני ורמי. את השלושה האלה יש לסדר יחד עם הגוש שבקצוות שלו יושבים דני ורמי. לכן בסך הכל יש $2!\binom{7-2}{2}2!4!$ סידורים.

9. אנו רוצים לבחור קבוצה של k איברים מתוך n. נבחר איבר כלשהו x מתוך n האיברים ונחלק את קבוצת האפשרויות ל-2 מקרים זרים :

A = x נבחר .

B = x לא נבחר.

אם x נבחר יש לבחור עוד k-1 צירופים מתוך תת הקבוצה המתקבלת ע״י הוצאת x . סה״כ $\binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות . אם x לא נבחר יש לבחור עוד k צירופים מתוך תת הקבוצה המתקבלת ע״י הוצאת x . סה״כ $\binom{n-1}{k}$ אפשרויות.

לכן $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = |B| + |A| = |X| = \binom{n}{k}$

10.

יהי $n>1,\ n\in N$ ויהיו $p_1, \dots, p_k$ הראשוניים שמחלקים את n.

תהי A קבוצת כל הטבעיים הקטנים מ- n <u>שאינם</u> זרים ל n. אנו מעוניינים למצא את $n-|A|$

לכל $0<t<n$, t לא זר ל- n אס״ם לפחות אחד מהראשוניים $p_1,p_2,\dots,p_k$ מחלק את t.

לכן A מכילה את כל המספרים שקטנים או שווים ל n וגם מתחלקים בלפחות אחד מהראשוניים $p_1,p_2,\dots,p_k$.

כדי לחשב את $|A|$ נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה.

תהי A_j הקבוצה שמכילה את כל האיברים ב- A שמתחלקים ב- p_j עבור $j = 1,\dots,k$.

אזי מכיוון ש $p_1,p_2,\dots,p_k$ מחלקים את n $\left|A_j\right| = \frac{n}{p_j}$ לכל $j = 1,\dots,k$.

לכל $i_1,i_2 \in \{1,2,\dots,k\}$ שונים זה מזה הקבוצה $A_{i1} \cap A_{i2}$ היא קבוצת כל המספרים שמתחלקים ב p_{i1},p_{i2} לכן $|A_{i1} \cap A_{i2}| = \frac{n}{p_{i1}p_{i2}}$.

לכל $i_1,i_2,\dots,i_k \in \{1,2,\dots,k\}$ שונים זה מזה הקבוצה $A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik}$ היא קבוצת כל המספרים שמתחלקים ב $p_{i1},p_{i2},\dots,p_{ik}$ לכן: $|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik}| = \frac{n}{p_{i1}p_{i2}\cdots p_{ik}}$.

לכן נקבל :

$$|A| = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} - \sum_{1\le i<j\le k} \frac{n}{p_i p_j} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{n}{p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k}$$

$$\varphi(n) = n - |A| =$$

$$n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le k} \frac{n}{p_i p_j} + \dots + (-1)^{k} \frac{n}{p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k} =$$

$$n \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le k} \frac{1}{p_i p_j} + \dots + (-1)^{k} \frac{1}{p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k}\right) =$$

$$= n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$