1.

א. $u=x^3, v=y^3$. משוואת קושי רימן הראשונה היא אם $3x^2=3y^2$, והשנייה היא $0=0$
שמתקיימת תמיד. בסה"כ תנאי קושי רימן מתקיים בקבוצה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2=y^2\right\}$

ב. כאן $u=2x, v=y$. משוואת קושי רימן הראשונה היא $2=1$ שאינה מתקיימת כלל. לכן אין שום נקודה בה תנאי קושי רימן מתקיים.

ג. $u=x^3+y^5, v=0$ משוואות קושי רימן הן $3x^2=0$ ו- $5y^4=0$, ולכן קושי רימן מתקיים אך ורק בנקודה $(0,0)$.

2. תהי $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ לפי

$$f(z)=u(x+y)-iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x).
פתרון: נסמן $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ כלומר

$$U(x,y)=u(x+y),\quad V(x,y)=-u(x-y)$$

היות ש u גזירה ברציפות, נקבל שהנגזרות U_x,U_y,V_x,V_y קיימות ורציפות ולכן U,V דיפרנציאביליות בכל נקודה ובפרט על הציר הממשי. נותר לבדוק את קיום משוואות קושי רימן

$$U_x(x,y)=u'(x+y),\quad U_y(x,y)=u'(x+y)$$

$$V_x(x,y)=-u'(x-y)\quad V_y(x,y)=u'(x-y)$$

לכן

$$U_x(x,0)=u'(x)=V_y(x,0),\quad U_y(x,0)=u'(x)=-V_x(x,0)$$

כנדרש ולכן f גזירה על ציר x.

3. מצאו פונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$.
פתרון: אם משוואות קושי רימן ייצאו לנו

$$x^2+y^2=2\quad x^2=y^2$$

אז קל לראות שהנקודות שבהן הפונקציה גזירה הן רק הנקודות הרצויות. צריך למצוא פונקציה שאלו משוואות קושי רימן שלה.
נכתוב את המשוואות בתור

$$x^2=2-y^2\quad x^2=y^2$$

נחליט ש $u_x=x^2$ ולכן $u=\frac{1}{3}x^3+C(y)$ כאשר $C(y)$ היא פונקציה שתלויה רק ב y. כמו כן נחליט ש $u_y=y^2$ ולכן $u=\frac{1}{3}y^3+C(x)$ כלומר בינתיים נראה שאפשר לקחת

$$u(x,y)=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2$$

בהתאמה נקבל לפי משוואות קושי רימן

$$v_y=2-y^2\quad v_x=-x^2$$

ולכן

$$v(x,y)=2y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}x^3$$

כלומר הפונקציה

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + i(2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3)$$

מתאימה לדרישות.

4. תהי $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.
פתרון: אם נסמן

$$g(z) = (f(z))^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$$

היות ש $\mathrm{Re}(g)$ היא פונקציה קבועה, ו $g(z)$ גזירה, נקבל ש $g(z)$ קבועה. כלומר $(f(z))^2 = D$ קבוע. אם במקרה $D = 0$ סיימנו. אם לא, נסמן את שני השורשים של D בתור d_1, d_2, זה מחייב שלכל ערך z

$$f(z) \in \{d_1, d_2\}$$

נותר להוכיח ש f שווה רק לאחד משני הערכים האלה. נזכור ש $f(z)$ גזירה ולכן בוודאי רציפה. נניח בשלילה שקיימים z_1, z_2 כך ש $f(z_i) = d_i$. נבחר מסילה $\gamma(t)$ כלשהיא בין z_1 ל z_2. לפי משפט ערך הביניים תמונתה תחת f היא מסילה בין d_1, d_2 אבל מצד שני $f(\gamma(t)) \subseteq \{d_1, d_2\}$ בסתירה. ולכן לכל z מתקיים $f(z) = d_1$ או $f(z) = d_2$ כלומר f קבועה כנדרש.

5. מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ שבהן $f(z) = \overline{z}e^{-17z^2}$ גזירה.
פתרון: נניח ש $f(z)$ גזירה בנקודה z_0 כלשהיא. נשים לב שהפונקציה e^{17z^2} גזירה בכל נקודה ולכן גם ב z_0 ולכן הפונקציה $f(z) \cdot e^{17z^2} = \overline{z}$ גזירה גם כן ב z_0, אבל ידוע ש $\overline{z}$ אינה גזירה באף נקודה. לכן גם $f(z)$ אינה גזירה באף נקודה.

6. הוכיחו כי

(א) לכל z מתקיים $|e^z| \leq e^{|z|}$

פתרון: אם $z = x + iy$ אז

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| = e^x$$

$$e^{|z|} = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

היות ש $\sqrt{x^2+y^2} \leq x$ בוודאי ש

$$e^x \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(ב) מתקיים שוויון אם ורק אם z ממשי אי שלילי.

פתרון: אם z ממשי אי שלילי ברור שמתקיים שוויון. אם מתקיים שוויון אז

$$e^x = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

כלומר

$$x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

וזה וודאי מכריח $x \leq 0$ ו $y = 0$.

7. פתרו את המשוואה $e^{e^z} = 1$.
פתרון: לפי התכונות של e אנחנו יודעים בעצם ש

$$e^z = 2\pi ik \quad k \in \mathbb{Z}$$

אם $k = 0$ כמובן שאין לזה פתרון. עבור $k > 0$ נקבל

$$2\pi ik = e^{\ln(2\pi k)} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ולכן

$$z = \ln(2\pi k) + i\frac{\pi}{2} + 2\pi in \quad n \in \mathbb{Z}$$

ועבור $k < 0$ נקבל בדומה

$$z = \ln(2\pi|k|) - i\frac{\pi}{2} + 2\pi in \quad n \in \mathbb{Z}$$

אם נאחד את הפתרונות נקבל

$$z = \ln(2\pi|k|) + i\frac{\pi}{2} + \pi in \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$