

לינארית 1, סמסטר קיץ תשפ"ו, מועד א'

26.8.2026, י"ג באלול התשפ"ו

מרצים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אליהו מצרי, ארז שיינר.
מתרגלים: הראל רוזנפלד, שירה ידעי, ישי זגדון, פלדמן עדו, נעה כהן, דניאל עומר.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטייטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (9 נקודות לסעיף) נגדיר שתי מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיס ל $N(A) \cap N(B)$.

(ב) מצאו מטריצה $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ שונה ממטריצת האפס כך ש $AC = 0, BC = 0$.

(ג) תהא $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ שונה ממטריצת האפס כך ש $AC = 0, BC = 0$.

מצאו את כל האפשרויות ל $\text{rank}(C)$.

2. (9 נקודות לסעיף) התבוננו במרחב $\mathbb{R}^3$. נתונים הוקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ a^3 - 3a^2 + 3a \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} a^3 + 1 \\ a^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כאשר a פרמטר ממשי.

(א) קבעו לכל ערך של a האם קיימת העתקה לינארית יחידה או קיימות אינסוף העתקות לינאריות או אין העתקות לינאריות בכלל המקיימות: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש

$$Tu_1 = v_1, Tu_2 = v_2, Tu_3 = v_3$$

(ב) קבעו לכל ערך של a האם קיימת העתקה לינארית יחידה או קיימות אינסוף העתקות לינאריות או אין העתקות לינאריות בכלל המקיימות:

$$T: \text{span}\{u_1, u_2, u_3\} \rightarrow \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$$

כך שהיא פונקציה על.

3. (9 נקודות לסעיף) ענו על הבאים:

(א) תהא

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

מצאו מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת כי $\det(BAB^t) = \det(A) + \det(B)$.

(ב) נתון k טבעי. יהיו וקטורים ב $\mathbb{F}^k$ שהם בת"ל. נגדיר

$$w_1 = v_1 + v_2 - v_4$$

$$w_2 = v_1 + v_2 + v_3$$

$$w_3 = v_2 + v_3 + v_4$$

$$w_4 = v_1 + v_2$$

מצאו בסיס ל $\text{span}\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

(ג) תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם $A^t B$ הפיכה אז $B^t A$ הפיכה.

4. (9 נקודות לסעיף) תהא $T : V \rightarrow V$ ה"ל. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם קיים בסיס סדור B של V כך ש $[T]_B^B$ מטריצה סקלרית

אז לכל בסיס סדור C של V מתקיים ש $[T]_C^C$ מטריצה סקלרית.

(ב) אם קיים בסיס סדור B של V כך ש $[T]_B^B$ מטריצה אלכסונית

אז לכל בסיס סדור C של V מתקיים ש $[T]_C^C$ מטריצה אלכסונית.

5. יהיו V, W מ"ז מעל אותו שדה. נסמן $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ בסיסים ל V, W בהתאמה.

לכל $1 \leq i \leq n$ ולכל $1 \leq j \leq m$ נגדיר העתקה $T_{i,j} : V \rightarrow W$ בעזרת משפט ההגדרה כך

$$T_{i,j}(v_i) = w_j$$

ולכל $k \neq i$ נגדיר $T_{i,j}(v_k) = 0_W$. עוד נסמן $\text{Hom}(V, W)$ את מרחב העתקות מ V ל W .

(א) (6 נקודות) הוכיחו כי הקבוצה $\{T_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ היא בסיס ל $\text{Hom}(V, W)$.

(ב) (5 נקודות לסעיף) נניח כי $W = V$. תהא $S : V \rightarrow V$ ה"ל ויהא $\{R_1, \dots, R_N\}$ בסיס של $\text{Hom}(V, V)$.

הוכיחו כי:

i. $\{SR_1, \dots, SR_N\}$ בסיס של $\text{Hom}(V, V)$ אממ S הפיכה.

ii. $\{R_1 S, \dots, R_N S\}$ בסיס של $\text{Hom}(V, V)$ אממ S הפיכה.