

פתרון מבחן בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תשפ"ה

תאריך: 30/09/24

מרצה: ד"ר ארז שיינר.

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=)

שאלה 1: נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 1 \\ |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ x+2 & x < -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(f(x)) \geq x$

תחום ראשון $x > 1$

בתחום זה $f(x) = -x^2 < -1$

ולכן

$$f(f(x)) = f(-x^2) = -x^2 + 2$$

ולכן אי השוויון נראה כך

$$-x^2 + 2 \geq x$$

$$-x^2 - x + 2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = -2, 1$$

כיוון ש $x > 1$ והפרבולה בוכה, לא מתקיים בכל התחום.

תחום שני $-1 \leq x \leq 1$

בתחום זה

$$f(x) = |x| \in [0,1]$$

ולכן

$$f(f(x)) = f(|x|) = ||x|| = |x|$$

אי השוויון נראה כך

$$|x| \geq x$$

וואלה נכון. (מתקיים בכל התחום).

תחום הבא (עשיתי קצת חשבון בראש) הוא $-3 \leq x < -1$

בתחום זה

$$f(x) = x + 2$$

$$-1 \leq x + 2 < 1$$

ולכן

$$f(f(x)) = |x + 2|$$

ואי השוויון נראה כך

$$|x + 2| \geq x$$

זה נכון כי x שלילי (בכל התחום).

לבסוף $x < -3$

$$f(x) = x + 2$$

$$x + 2 < -1$$

$$f(f(x)) = f(x + 2) = x + 2 + 2 = x + 4$$

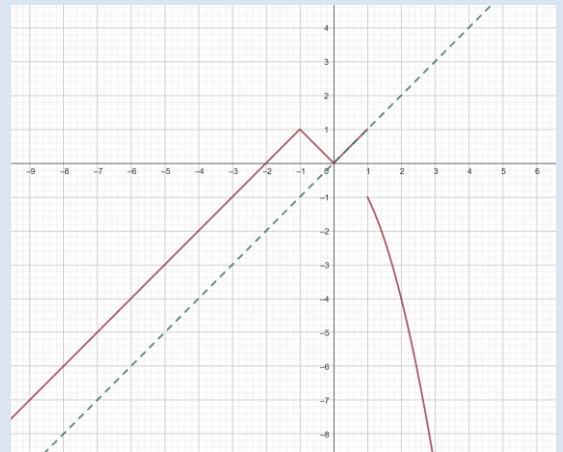
ואי השיוויון נראה כך:

$$x + 4 \geq x$$

זזה נכון בכל התחום.

סה"כ אי השיוויון מתקיים בתחום $(-\infty, 1]$

המחשה מיותרת:



שאלה 2: מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $(iz^3 - 1)((1 + i)z^5 + 1) = 0$

אחד מהביטויים במכפלה צריך להתאפס.
לא לפתוח סוגריים כמו חמור עם משקפיים.

$$iz^3 - 1 = 0$$

$$iz^3 = 1$$

נכפול ב- i

$$z^3 = -i = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

ונקבל שלושה פתרונות

$$z_k = \text{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

עוד ייתכן כי

$$(1 + i)z^5 = -1$$

נכפול בצמוד $1 - i$

$$2z^5 = -1 + i$$

$$z^5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

נעביר את המספר לצורה גאומטרית:

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

כיוון שהחלק הממשי שלילי:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + \pi = \frac{3}{4}\pi$$

סה"כ

$$z^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$$

ונקבל 5 פתרונות

$$w_k = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi k}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

הערה: אם היו שואלים כמה פתרונות יש למשוואה, היינו צריכים לוודא שאין חזרה בין z_k, w_m אבל לא שאלו. מצד שלישי, הרדיוסים שונים ולכן בוודאות כאן אין חזרה.

שאלה 3:

נביט במישור $x + y - z = 1$ ובישר המאונך למישור זה ועובר בנקודה $(2, 2, 0)$ ונקרא לו L_1 .
נביט במישור $x - 2y + z = 0$ ובישר המאונך למישור זה ועובר בנקודה $(2 + a, 3 - a, 2 - a)$ ונקרא לו L_2 .
נתון כי יש נקודת חיתוך בין שני הישרים L_1, L_2 , מצאו את הערך של a ומצאו את נקודת החיתוך.

נמצא ייצוג פרמטרי של הישרים:

L_1 הוא

$$(2, 2, 0) + t(1, 1, -1)$$

L_2 הוא

$$(2 + a, 3 - a, 2 - a) + t(1, -2, 1)$$

נחפש חיתוך בין הישרים, ונשים לב כי המקדם של וקטור הכיוון לא חייב להיות זהה

$$(2, 2, 0) + t(1, 1, -1) = (2 + a, 3 - a, 2 - a) + s(1, -2, 1)$$

נשווה כל קואורדינטה

$$\begin{cases} 2 + t = 2 + a + s \\ 2 + t = 3 - a - 2s \\ -t = 2 - a + s \end{cases}$$

נסדר את המערכת

$$\begin{cases} t - a - s = 0 \\ t + a + 2s = 1 \\ -t + a - s = 2 \end{cases}$$

נחבר את המשוואה הראשונה לשלישית

$$-2s = 2$$

$$s = -1$$

נציב ונחזור למשוואות:

$$\begin{cases} t - a = -1 \\ t + a = 3 \\ -t + a = 1 \end{cases}$$

נחבר משוואה שנייה ושלישית

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

ידוע לנו כי יש נקודת חיתוך (לא אבדוק אם זה נכון, מוזמנים אם אתם רוצים)

נק' החיתוך היא

$$(2 + 2, 3 - 2, 2 - 2) = (1, -2, 1)$$

שאלה 4:

הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה או בכל דרך אחרת: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$n^3 \geq n^2 + n - 1$$

בדיקה: $n = 0$ אכן

$$0^3 \geq 0 + 0 - 1$$

יהי n עבורו $n^3 \geq n^2 + n - 1$

נוכיח כי

$$(n+1)^3 \geq (n+1)^2 + (n+1) - 1$$

נפתח את הצד השמאלי

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

נפתח הצד הימני

$$(n+1)^2 + (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 1 = n^2 + 3n + 1$$

צ"ל כי

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \geq n^2 + 3n + 1$$

$$n^3 + 2n^2 \geq 0$$

וזה נכון תמיד.

זה לא ממש היה אינדוקציה.

ננסה כן להשתמש בהנחת האינדוקציה (למרות שלא חייב)

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \stackrel{WIN}{=} [n^3 - (n^2 + n - 1)] + 4n^2 + 4n \stackrel{\substack{\text{הנחת} \\ \text{האינדוקציה}}}{\geq} 4n^2 + 4n$$

נותר להוכיח כי

$$4n^2 + 4n \geq n^2 + 3n + 1$$

$$3n^2 + 4n + n^2 \geq n^2 + 3n + 1$$

וזה נכון לכל $n > 0$. את המעבר מ-0 ל-1 אפשר לבדוק ידנית על ידי הצבת $n = 1$

דרך נוספת בעזרת חדו"א:

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$n^3 - n^2 - n + 1 \geq 0$$

נביט בפונקציה

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

נרצה להוכיח כי $f(x) \geq 0$ עבור $x \in \mathbb{N}$

נחקור אותה

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = 1, -\frac{1}{3}$$

כל המספרים הטבעיים $n \geq 1$ נמצאים בתחום $[1, \infty)$ שם הנגזרת חיובית ולכן הפונקציה עולה.

נציב $x = 1$ ונראה כי

$$f(1) = 0$$

ולכן אכן לכל $n \geq 1$ מתקיים כי $f(n) \geq f(1) = 0$

שאלה 5: פתרו את האינטגרל

$$\int x^2 e^x dx$$

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= \left\{ \begin{matrix} f' = e^x & g = x^2 \\ f = e^x & g' = 2x \end{matrix} \right\} = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \left\{ \begin{matrix} f' = e^x & g = x \\ f = e^x & g' = 1 \end{matrix} \right\} = \\ &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C\end{aligned}$$

שאלה 6:

הגדרה: תהי X קבוצה של קבוצות טבעיים. X נקראת סלקטיבית אם
 $\forall A \in X: A \cap \{1,2\} \in X$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש X אינה סלקטיבית.
ב. קבעו והוכיחו לכל אחת מן הקבוצות הבאות אם היא סלקטיבית או לא:

$$Z = \{ \{n\} \mid n \in \mathbb{N} \} \qquad Y = \{ \{1, n\} \mid n \in \mathbb{N} \} \qquad X = \{ \emptyset, \{1,3\} \}$$

סעיף א':

$$\exists A \in X: A \cap \{1,2\} \notin X$$

סעיף ב':

נתחיל מ X , היא אינה סלקטיבית כי עבור

$$\begin{aligned}A &= \{1,3\} \\ A \cap \{1,2\} &= \{1\} \notin X\end{aligned}$$

כעת Y אכן סלקטיבית
תהי $A = \{1, n\} \in Y$ כעת

$$\begin{aligned}A \cap \{1,2\} &= \{1\} \text{ או } \{1,2\} \\ \text{כך או כך שתי הקבוצות שייכות ל } Y \text{ כיוון שעבור } n = 2 \\ \{1, n\} &= \{1,2\}\end{aligned}$$

ועבור $n = 1$

$$\{1, n\} = \{1,1\} = \{1\}$$

כעת נעבור לקבוצה Z
היא אינה סלקטיבית, נבחר $A = \{3\}$ ונקבל כי

$$A \cap \{1,2\} = \emptyset \notin Z$$

שאלה 7: הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \subseteq B$ וכן $A \cap C \neq \emptyset$ אזי $C \setminus B \neq C$.

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \subseteq B$ וכן $A \cap C \neq \emptyset$ אזי $B \setminus A \neq C$.

סעיף א': הוכחה-

כיוון ש $A \cap C \neq \emptyset$ קיים $x \in A \cap C$

כיוון ש $A \subseteq B$ מתקיים כי $x \in B$

לכן $x \in C \setminus B$ אבל $x \in C$ ולכן

$$C \setminus B \neq C$$

סעיף ב':

אותה הוכחה כמעט בדיוק, x נמצא בשלושת הקבוצות, ולכן

$$x \in C$$

אבל

$$x \notin B \setminus A$$