מועד א׳ – מד״ר 115-83 – 05/07/2026

מרצה: דר׳ ארז שיינר מרצה מלווה: דר׳ אריאל ויצמן משך הבחינה: שלוש שעות מתרגלים: גב׳ יולי שקד,

גב׳ חנה שפירא, מר יואב יוסיף אור, גב׳ ירדן נחמה אביעד, מר ישי פריש, גב׳ דנה מרקיוויץ

משך הבחינה: שלוש שעות משקל כל שאלה: 22 נק׳ חומר עזר: נוסחאון מצורף, מחשבון מותר

1. מצאו פתרון למד״ר $y' = 2xy$ המקיים $y(0) = 1$.

2. מצאו פתרון למד״ר $y' = 2xy + e^{x^2}$ המקיים $y(0) = 1$.

3. מצאו פתרון למד״ר $y'''' + 4y = e^x$ המקיים: $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

4. האפי החתול (≽^•ω•^≼) הפיל כוס מהשולחן. המסה של הכוס היא $0.2\ kg$, כוח המשיכה הוא mg כאשר $g = 10$, והתנגדות האוויר היא בגודל $0.004 \cdot v$.
הכוס הגיעה לרצפה לאחר 0.448 שניות. מה גובה השולחן? (אפשר לתת תשובה בקירוב של 3 ספרות.)

גרסא באנגלית של שאלה 4:

Happy the cat (≽^•ω•^≼) knocked a cup off the table. The mass of the cup is 0.2 kg, the gravitational force is mg, where $g = 10$, and the air resistance has magnitude $0.004v$.

The cup reached the floor after 0.448seconds. What is the height of the table? You may give an approximate answer rounded to 3 decimal places.

5. נסמן בD את אופרטור הגזירה, בI את אופרטור הזהות, ונסמן: $S = D - 2xI$.
מצאו את הפתרון הכללי למד״ר $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$.
רמז: הביטו באופרטור S^2, כלומר חשבו את $S(S(y))$.

נוסחאון מד"ר

חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:

כתיב דיפרנציאלי – את המד"ר $y' = f(x,y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x,y)dx$

מד"ר פרידה – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$
כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

מד"ר הומוגנית – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z}dz = \ln|x| + C$. נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$.

ניתן להציג את $f(x,y)$ כ$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.
במקרה זה $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

מד"ר לינארית מסדר ראשון – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחא

$$y = e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}dx\right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

משוואת ברנולי – יהי $n \neq 0,1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.
נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.
נמצא את z ונחלץ את y.

מד"ר מדוייקת – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x,y)=C$ כאשר $F_x=P, F_y=Q$.

שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y=Q_x$.
2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F=\int Pdx+c(y)$.
3. נגזור ונשווה למקדם השני $\frac{\partial}{\partial y}(\int Pdx+c(y))=Q$, וכך נמצא את $c(y)$.
4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x,y)=C$.

<u>גורם אינטגרציה</u> – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, נחפש גורם אינטגרציה μ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1.
   א. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ אינו תלוי בy,
   במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}$.
   ב. יש גורם אינטגרציה $\mu(y)$ אם הביטוי $\frac{Q_x-P_y}{P}$ אינו תלוי בx,
   במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(y)=e^{\int\frac{Q_x-P_y}{P}dy}$.
2. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).
3. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

<u>בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון</u> – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y'=f(x,y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$.

<u>המשוואה האינטגרלית</u> – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\big(t,y(t)\big)dt$.

<u>משפט הקיום והיחידות</u> – תהי $f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b$.
נסמן בM את החסם של $|f(x,y)|$ בתחום, ונסמן $a'=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$.

אזי **קיים** פתרון **יחיד** y לבעיית הקושי $y'=f(x,y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$ בתחום $|x-x_0|\le a'$.

<u>חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:</u>

<u>משמעות הנגזרות</u> –

1. $y(t)$ מיקום
2. $v(t)=y'(t)$ מהירות
3. $a(t)=y''(t)$ תאוצה

<u>החוק השני של ניוטון</u> - $F=ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g \approx 9.82\ m/sec^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם y הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.

חלק ג' – מד"ר מסדר גבוה:

הורדת סדר למד"ר מסדר שני ללא המשתנה – עבור מד"ר מהצורה $y'' = f(y, y')$

1. נחפש פונקציה $p(y)$ עבורה $p'p = f(y, p)$.
2. נחפש פונקציה y המקיימת $y' = p(y)$.

מד"ר לינארית – מד"ר מהצורה $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ נקראת מד"ר לינארית מסדר n.
אם $b(x) = 0$ המד"ר נקראת הומוגנית.

בעיית קושי למד"ר לינארית – מציאת פונקציה המקיימת את המד"ר הלינארית מסדר n ואת תנאי ההתחלה

$$y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

משפט קיום ויחידות – אם המקדמים $a_i(x), b(x)$ רציפים בקטע I אזי קיים פתרון יחיד בקטע I המקיים את בעיית הקושי.

מרחב הפתרונות –מרחב הפתרונות למד"ר הלינארית ההומוגנית מסדר n עם מקדמים רציפים הוא ממימד n.

פתרון כללי למד"ר לינארית – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים, יהיו $y_0, \dots, y_{n-1}$ בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית ויהי y_p פתרון פרטי למד"ר האי הומוגנית. אזי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y = y_p + c_0 y_0 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1}$$

הורונסקיאן – עבור הפוקנציות $y_1, \dots, y_n$ נגדיר את הורונסקיאן

$$W = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & {y_n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

תלות לינארית של פתרונות – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I, ויהיו $y_1, \dots, y_n$ פתרונות למד"ר.

אזי הפתרונות ת"ל אם ורק אם הורונסקיאן מתאפס בכל הקטע I.

<u>מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים</u> – הפולינום האופייני של המד"ר $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y =$ $f(x)$ הוא

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

אם $\lambda \in \mathbb{R}$ שורש ממשי של הפולינום האופייני מריבוי k, אזי הוא תורם את הפתרונות

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

למד"ר ההומוגנית.

אם $\lambda = a \pm bi \in \mathbb{C}$ זוג שורשים מרוכבים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד, אזי הם תורמים את הפתרונות

$$e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\sin(bx), xe^{ax}\cos(bx), xe^{ax}\sin(bx), \dots, x^{k-1}e^{ax}\cos(bx), x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)$$

למד"ר ההומוגנית.

<u>שיטת הניחוש עבור מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים</u> – עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)e^{ax}$$

כאשר a שורש של הפולינום האופייני מריבוי k ננחש פתרון פרטי

$$y_p = x^k(d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m)e^{ax}$$

עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)e^{ax}\cos(bx)$$

או המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)e^{ax}\sin(bx)$$

כאשר $a \pm bi$ שורשים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד ננחש פתרון פרטי:

$$y_p = x^k(d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m)e^{ax}\cos(bx) + x^k(t_0 + t_1 x + \cdots + t_m x^m)e^{ax}\sin(bx)$$

<u>שיטת וריאצית המקדמים בעזרת כלל קרמר למציאת פתרון פרטי</u> – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

ויהיו $y_0, \dots, y_{n-1}$ פתרונות המהווים בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית. אזי הפונקציה

$$y_p = c_0(x)y_0(x) + \cdots + c_{n-1}(x)y_{n-1}(x)$$

מהווה פתרון פרטי למד"ר אם לכל i מתקיים כי

$$c_i'(x) = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} \\ {y_0}' & {y_1}' & \cdots & {y_{n-1}}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_0^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

וכן A_i היא המטריצה המתקבלת מA ע"י החלפת העמודה ה$i+1$ בעמודה $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

<u>טורי טיילור</u> –

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \qquad a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \qquad \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

<u>מערכת מד"ר</u> – עבור מערכת מד"ר מהצורה $\vec{y}^{(n)}=A\vec{y}$, כאשר v_1 ו"ע עם ע"ע מתאים λ_1 של המטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ננחש פתרון $\vec{y}=f\cdot v_1$, ונקבל כי הוא אכן פתרון אם $f^{(n)}=\lambda_1 f$.

<u>משוואת אוילר</u> – משוואת אוילר הומוגנית היא משוואה לינארית מהצורה

$$a_n x^n y^{(n)}+\cdots+a_1 x y'+a_0 y=0$$

על מנת למצוא את הפתרונות של משוואת אוילר הומוגנית נבצע את השלבים הבאים:

1. נציב $y=x^r$ במשוואה, נצמצם את x^r ונקבל את המשוואה האינדנציאלית.
2. אם $r\in\mathbb{R}$ שורש מריבוי k של המשוואה האינדנציאלית, נקבל את הפתרונות
$x^r, \ln(x)\,x^r, \dots, (\ln(x))^{k-1}x^r$
3. אם $a\pm bi\in\mathbb{C}$ שורשים מריבוי k כל אחד של המשוואה האינדנציאלית נקבל את הפתרונות
$x^a\cos(b\ln(x)), x^a\sin(b\,ln(x)), \ln(x)\,x^a\cos(b\,ln(x)), \ln(x)\,x^a\sin(b\,ln(x)), \dots$
$\dots, (\ln(x))^{k-1}x^a\cos(b\,ln(x)), (\ln(x))^{k-1}x^a\sin(b\ln(x))$

<u>תגובה להלם עם קונבולוציה</u>

תהי מד"ר $y''+by'+cy=f(x)$
ותהי תגובה להלם $s(x)$ כלומר הפתרון למד"ר ההומוגנית המקיים $s(0)=0$ וכן $s'(0)=1$.

אזי פתרון פרטי למד"ר הלא הומוגנית הוא הקונבולוציה עם התגובה להלם

$$y(x)=f*s=\int_{x_0}^{x} f(u)s(x-u)du$$

חלק ד' – התמרת לפלס והדלתא של דירק:

התמרת לפלס - $\mathcal{L}(y) = \int_0^\infty e^{-st} y(t)dt$

התמרות לפלס ידועות –

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a}$$

$$\mathcal{L}\big(\delta(t - a)\big) = e^{-sa}$$

תכונות התמרת לפלס –

יחידות –

אם y_1, y_2 רציפות וכן $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2)$ אזי $y_1 = y_2$.

לינאריות –

$$\mathcal{L}(y_1 + ay_2) = \mathcal{L}(y_1) + a\mathcal{L}(y_2)$$

התמרת הנגזרת הראשונה –

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

התמרת הנגזרת –

$$\mathcal{L}\big(y^{(n)}\big) = s^n\mathcal{L}(y) - s^{n-1}y(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

נגזרת ההתמרה –

$$\mathcal{L}(ty) = -F'(s)$$

הזזה של המשתנה s- אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$F(s-a) = \mathcal{L}\left(e^{at}y(t)\right)$$

הזזה של המשתנה t- אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}\left(u(t-a)y(t-a)\right)$$

כאשר $u(t)$ היא פונקצית המדרגה:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

<u>חלק ה' – שיטת אוילר לקירוב נומרי</u>

תהי בעיית קושי $y' = f(x,y)$, עם תנאי ההתחלה $f(x_0) = y_0$.

שיטת אוילר $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$

השיטה המשופרת של אוילר $y_{n+1} = y_n + f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + f(x_n, y_n) \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot h$