קורס: אלגברה ליניארית 1
מרצה: פר' אנדרי רזניקוב
מתרגלים: מני ולואי

פתרון לתרגיל בית מספר 2

<u>תרגיל 1.3</u>

ב. על פי חוק החילוף נקבל $a+c=c+a=c+b=b+c$ והגענו לסעיף א'. באותו האופן לגבי כפל.

ה. $a=a\cdot 1=a((a^{-1})(a^{-1})^{-1})=(aa^{-1})(a^{-1})^{-1}=(a^{-1})^{-1}$

(בדוק מדוע השוויון האחרון נכון).

<u>תרגיל 2.2</u>

ג. מתקיים $(p-a)\in\mathbb{Z}_p$ ולפי הגדרת החיבור מתקיים $a\oplus(p-a)=p \bmod p=0$.

<u>תרגיל 2.3</u>

ב. למספר 2 אין הופכי.

ד. לא, כי למשל $1+0_F\neq 1$

<u>תרגיל 4.1</u>

נוכיח באינדוקציה על n כי לכל $a\in F$ מתקיים- $n\cdot a=(n\cdot 1_F)\cdot a$.

בסיס האינדוקציה ($n=1$):

$(1\cdot 1_F)\cdot a=1_F\cdot a=a=1\cdot a$ (עפ"י הגדרת 1_F כאיבר נייטרלי ביחס לכפל בשדה).

נניח נכונות עבור $n=k$:

$k\cdot a=(k\cdot 1_F)\cdot a$

צ"ל נכונות עבור $n=k+1$:

יש להוכיח $(k+1)\cdot a=((k+1)\cdot 1_F)\cdot a$.

$$((k+1)\cdot 1_F)\cdot a=\Big(\underbrace{1_F+1_F+1_F+....+1_F}_{k+1}\Big)\cdot a=\Big(\Big(\underbrace{1_F+1_F+1_F+....+1_F}_{k}\Big)+1_F\Big)\cdot a$$

$$=(k\cdot 1_F+1_F)\cdot a\underset{(1)}{=}(k\cdot 1_F)\cdot a+1_F\cdot a\underset{(2)}{=}k\cdot a+a=\underbrace{a+a+....+a}_{k}+a=\underbrace{a+a+....+a}_{k+1}=(k+1)a$$

והוכחנו את הטענה . שוויון (1) נובע מחוק הפילוג בשדה, שויון (2) נובע מהנחת האינדוקציה ומהגדרת 1_F בשדה.

כעת, מכיון שלכל $a\in F$ מתקיים

$n\cdot a=(n\cdot 1_F)\cdot a$ נקבל שאם $n>0$ מאפיין של F אז $n\cdot a=(n\cdot 1_F)\cdot a=0_F\cdot a=0_F$.

<u>תרגיל 4.4 – א'</u>

יש הוכחה לכך בהרצאה.

פתרון התרגיל הנוסף

א. צריך להוכיח: $(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}\left((c,d)+_{\mathbb{C}}(e,f)\right)=(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(c,d)+_{\mathbb{C}}(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(e,f)$. ההוכחה היא טכנית לחלוטין ומתבצעת ע"פ הגדרת החיבור והכפל.

ב. נוכיח קיום הפכי ביחס לכפל (יש להוכיח את כל שאר התכונות).
אם $(a,b)\neq(0,0)$ אזי $(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ איך מוצאים את ההפכי? פשוט רושמים $(a,b)\cdot(c,d)=1_{\mathbb{C}}=(1,0)$ ומקבלים 2 משוואות ב-2 נעלמים (הנעלמים הם c,d שאמורים להיות מבוטאים באמצעות a,b). אם נשתמש בהגדרת הכפל ונפתור את המשוואות נקבל $(c,d)=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. [שימו לב כי אכן מתקיים כי $a^2+b^2\neq 0$ כי $(a,b)\neq(0,0)$].

ג. האיבר המבוקש הוא אחד מן השניים: $(0,1)$, $(0,-1)$. [איך הגענו לזה? אנו יודעים כי $i\in\mathbb{C}$ מקיים את התכונה הדרושה, והוא מתאים לאיבר $(0,1)$. באופן דומה לגבי $-i\in\mathbb{C}$. הדרך השניה היא מציאת פתרון של המשוואה $(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(a,b)+_{\mathbb{C}}(1,0)=(0,0)$]

ד. היות ומתקיים $(a,1)\cdot(1,a)=(0,0)$ (בדקו!), קיבלנו מחלקי אפס.

ה. התשובה היא 'לא' והיא נובעת משני הסעיפים הקודמים. מסעיף ג' אנו יודעים שיש איבר $x\in\mathbb{C}$ המקיים $x^2+1=0$, $\mathbb{C}$ הוא שדה, ולכן לפי סעיף ד', $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ אינו שדה.