תורת גלואה – בוחן שני שליש – פתרון

יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל אחת משאלות 1—3 הוא 35 נקודות (אך הציון הכולל לא יעלה על 100).

חומר עזר מותר: חומר פתוח offline (**ללא** חיפוש באינטרנט או יצירת קשר כלשהו במהלך הבוחן).

משך הבוחן: שעה וחצי.

1. כתבו את ההצהרה הבאה בתחילת המבחן וחתמו בצידה:  
   **"פתרתי בוחן זה ביושר ובהגינות, ללא כל סיוע חיצוני, ובעזרת חומרי העזר המותרים בלבד".**
2. יהי . הוכיחו כי ממד שדה הפיצול של הוא לכל היותר .

**פתרון. מעל ההרחבה (שממדה 2 לכל היותר, או שהיא טריוויאלית) מתפרק למכפלה:**

***(כאשר: ) שמתפצלת לגורמים לינאריים מעל:***

***אך:***

***מצאנו הרחבה מפצלת מממד לכל היותר 36, וכל הרחבה מפצלת מכילה עותק של שדה פיצול.***

1. יהי שדה ויהי פולינום מדרגה 7. יהי שדה המפצל את ונניח כי אי-זוגי. יהי תת-שדה ביניים. הוכיחו כי אי-פריק מעל אם ורק אם אין לו שורש ב-.

**פתרון. ברור כי אם ל- יש שורש מעל אז הוא פריק מעליו. בכיוון ההפוך, נניח כי ל- אין שורש מעל ונתבונן בפירוק של לגורמים אי-פריקים מעל . נסמן את דרגות הגורמים האי-פריקים הללו . נניח בשלילה כי ולכן . נניח כי הגורם האי-פריק מעל המתאים ל- הוא . אזי שיכון (השולח את לאחד משורשי ) אך:**

**ולכן מן הנתון כל ה--ים אי-זוגיים, כלומר . אך 7 אינו סכום של מספרים כאלו, בסתירה. לפיכך פריק מעל אם ורק אם יש לו שורש מעל .**

1. יהי פולינום אי-פריק מדרגה 4, בעל בדיוק שני שורשים ממשיים. הוכיחו כי ממד שדה הפיצול של הוא 8 או 24.

**פתרון. יהי שדה פיצול. כל שורש של הוא מדרגה 4 מעל , ולכן , ומצד שני , כלומר האפשרויות הן 4,8,12,24.**

**יהי שורש ממשי של . אילו פירושו ש-, בסתירה לכך שיש רק שני ש*ורשים ממשיים (הרי פולינום אי-פריק מעל הוא ספרבילי, ולכן מספר השורשים שלו בהרחבה מתאימה הוא כדרגתו).***

***נניח בשלילה כי . אזי הרחבת גלואה עם חבורת גלואה מסדר 12. אך ל- ת"ח יחידה מאינדקס 2 והיא (כל ת"ח כזו היא נורמלית ומוגדרת כגרעין של הומומורפיזם לא טריוויאלי ל-, אך נוצרת על ידי עגילים מאורך 2 שכולם צמודים זה לזה, ולכן כל הומומורפיזם כזה נקבע על ידי תמונת עגיל כלשהו, ולפיכך יש רק הומומורפיזם לא טריוויאלי אחד ל- המתאים לסימן התמורה).***

***מצד שני, ההצמדה המרוכבת משרה אוטומורפיזם של שפעולתו על השורשים היא כשל עגיל יחיד, שכמובן אינו משתייך ל-, בסתירה.***

***לפיכך, (ואמנם שני הערכים אפשריים, אך לא נתבקשתם להוכיח זאת).***