

מועד ב', תשע"ו

מרצים: פרופ' יבגני פלוטקין, פרופ' בוריס קוניאבסקי

מתרגלים: אחיה בר-און, עדי לוגסי, תמר נחשוני

הנחיות:

בפרק א' יש לענות על שתיים מתוך שלוש השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 25 נק'. פרטו את תשובותיכם. בפרק ב' יש לענות על 10 מתוך 12 השאלות. ענו "כן" על כל טענה נכונה ו"לא" על כל טענה לא נכונה. אין חובה לפרט את תשובותיכם. הניקוד על כל שאלה הוא 5 נק'. יש לסמן את בחירתכם באופן ברור. במקרה שלא תסומנה השאלות הנבחרות, תיבדקנה שתיים הראשונות מפרק א' ועשר הראשונות מפרק ב'. משך הבחינה 150 דק'. חומר עזר-מחשבון.

פרק א'

שאלה 1 (25 נק')

העתקה  $T: R^4 \rightarrow R^4$  מוגדרת ע"י הנוסחא הבאה:

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ 2a + 2b + 2c + 2d \\ 2a + 2c \\ -a + 2b - c + 2d \end{pmatrix},$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת  $A = [T]_E$  יחסית לבסיס סמנדרטי

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

וחשבו את הפולינום האופייני של  $A$ . (10 נק')

ב. החליטו האם העתקה לכסינה. אם כן, מצאו בסיס של  $R^4$  המורכב מוקטורים עצמיים של  $A$ .

מצאו מטריצה הפיכה  $P$  ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש- $A = PDP^{-1}$ . (15 נק')

שאלה 2 (25 נק')

יהי  $V = R_2[x]$  מרחב הפולינומים מעל  $R$  ממעלה 2 לכל היותר. תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה המוגדרת ע"י הנוסחא  $T(f) = f'(0)$  (הנגזרת של פולינום  $f$ ).

א. הראו כי  $T$  היא העתקה ליניארית וחשבו  $\dim(Ker(T))$ ,  $\dim(Im(T))$ . (5 נק')

ב. האם  $T$  לכסינה? (10 נק')

ג. חשבו את הפולינום המינימלי  $m_T(x)$ . (10 נק')

שאלה 3 (25 נק')

יהי  $V = R_2[x]$  מרחב הפולינומים מעל  $R$  ממעלה 2 לכל היותר עם מכפלה פנימית המוגדרת ע"י הנוסחא

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(2)g(2) = f(-2)g(-2) \quad (*)$$

א. הראו כי זו אכן מכפלה פנימית. (5 נק')

ב. בנו בסיס אורתונורמלי של  $V$  (יחסית למכפלה פנימית זו). (10 נק')

- ג. חשבו את ההטל של  $h = 1 + x + x^2$  על תת-מרחב  $W$  של כל הפולינומים הקבועים (5 נק').
- ד. האם הנוסחא (\*) מגדירה מכפלה פנימית גם ב-  $V' = R_3[x]$ , מרחב הפולינומים מעל  $R$  ממעלה 3 לכל היותר? (5 נק').

### פרק ב' (שאלות "כנולא")

#### שאלה 4

אם  $A$  מטריצה הפיכה המורכבת ממספרים שלמים ואם  $A^{-1}$  גם מורכבת ממספרים שלמים, אזי  $\det(A) = \pm 1$ .

#### שאלה 5

אם  $A$  ו- $A'$  הן מטריצות מגודל  $7 \times 7$  כך ש-  $AA' + A'A = 0$ , אזי לפחות אחת מ- $A, A'$  אינה הפיכה.

#### שאלה 6

יהיה  $V$  מרחב וקטורי ממימד  $n$ , ויהי  $W$  מרחב האופרטורים הליניאריים  $\varphi: V \rightarrow V$ . אזי  $\dim(W) = n$ .

#### שאלה 7

אם  $A$  מטריצה מגודל  $2 \times 2$  כך ששני הערכים העצמיים שלה שווים ל-1, אזי  $A = I$  (מטריצת היחידה).

#### שאלה 8

אם  $\lambda, \mu$  הם ערכים עצמיים שונים של מטריצה  $A$ , אזי החיתוך של המרחבים העצמיים  $V_\lambda \cap V_\mu$  שווה ל-0.

#### שאלה 9

אם  $A = PA'P^{-1}$ , אזי כל וקטור עצמי של  $A$  הוא גם וקטור עצמי של  $A'$ .

#### שאלה 10

אם מטריצה ריבועית  $A$  גם נילפוטנטית וגם לכסינה, אזי  $A = 0$  (מטריצת האפסים).

#### שאלה 11

אם מטריצה  $A$  לכסינה, אזי  $A^2$  לכסינה גם היא.

#### שאלה 12

אם מטריצה  $A$  לכסינה, אזי הפולינום האופייני שלה שווה לפולנום המינימלי שלה.

### שאלה 13

אם הפולינום המינימלי של  $A$  שווה לפולינום המינימלי של  $A'$ , אזי כל צורת ז'ורדן של  $A$  היא גם צורת ז'ורדן של  $A'$ .

### שאלה 14

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית,  $u, v \in V$ . אם  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ , אזי  $u$  אורתוגונלי ל- $v$ .

### שאלה 15

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית,  $dim(V) = 3$ ,  $u, v, w \in V$ . אם  $u$  אורתוגונלי ל- $v$  ו- $v$  אורתוגונלי ל- $w$ , אזי  $u$  בהכרח אורתוגונלי ל- $w$ .

**בהצלחה!**