

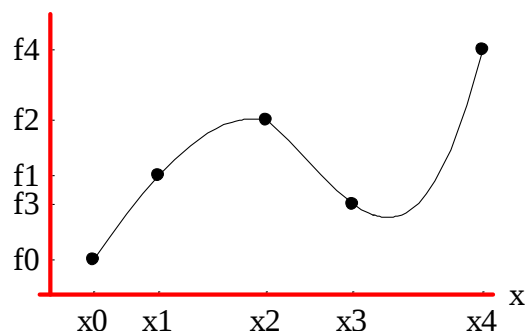
אינטרפולציה

Interpolation

הגדרת בעיית אינטרפולציה כללית

יהיו $n+1$ תצפיות $(x_i, y_i); i = 0, 1, \dots, n$

נגדיר פונקצית אינטרפולציה כצירוף ליניארי של פונקציות $\Phi_j(x)$:



$$f(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Phi_j(x)$$

$\Phi_j(x)$ נקראות פונקציות הבסיס

מטרה: למצוא וקטור מקדמים $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ עבורו

$$f(x_i) = y_i; i = 0, 1, \dots, n$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Phi_j(x) \quad \Rightarrow \quad (x_i, y_i); \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0) = \alpha_0 \Phi_0(x_0) + \alpha_1 \Phi_1(x_0) + \dots + \alpha_n \Phi_n(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = \alpha_0 \Phi_0(x_1) + \alpha_1 \Phi_1(x_1) + \dots + \alpha_n \Phi_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ f(x_n) = \alpha_0 \Phi_0(x_n) + \alpha_1 \Phi_1(x_n) + \dots + \alpha_n \Phi_n(x_n) = y_n \end{array} \right.$$



$$\begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

פתרון הבעיה : בעיית אינטרפולציה יכולה להיות מוגדרת כבעיה

אלגברית

$$Ax = b$$

כאשר $A = \{a_{ij}\}_{(n+1) \times (n+1)}$ ובה $a_{ij} = \Phi_j(x_i)$

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

פתרון הבעיה : $y_i = f(x_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Phi_j(x_i)$

$$A\alpha = y$$

כלומר

פולינום $P(x)$ מדרגה n :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0$$

תכונות של פולינומים

- לפולינום מדרגה n ישנם $n+1$ מקדמים $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$
- (אפס) שורש של פולינום: $z_i : P_n(z_i) = 0$
- לפולינום אלגברי מדרגה n יש בדיוק n שורשים.
- ניתן לרשום את הפולינום כ: $p_n(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\dots(x - z_n)$

קיים לכל היותר פולינום יחיד ממעלה הקטנה שווה ל- n , העובר דרך $n + 1$ הנקודות:
 $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$.

הוכחה

נתונות לנו $n + 1$ נקודות: $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. יהי $p(x)$ פולינום האינטרפולציה ממעלה לכל היותר n העובר ב- $n + 1$ הנקודות ומקיים $p(x_i) = y_i$ $0 \leq i \leq n$.

נניח בשלילה כי קיים פולינום נוסף $q(x)$ ממעלה לכל היותר n השונה מהפולינום $p(x)$ וגם הוא מקיים את הדרישה של האינטרפולציה, כלומר: $q(x_i) = y_i$ $0 \leq i \leq n$.

נגדיר פולינום חדש: $r(x) = p(x) - q(x)$. לכן מתקיים:

$$0 \leq i \leq n \quad r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0$$

הפולינום $r(x)$ חייב להיות פולינום ממעלה n לכל היותר (טריוויאלי). לפיכך, הפולינום היחידי ממעלה לכל היותר n וקיימים לו $n + 1$ שורשים חייב להיות פולינום ה-0!

$$r(x) = p(x) - q(x) \Rightarrow 0 = p(x) - q(x) \Rightarrow p(x) = q(x)$$

וזה בסתירה להנחה ש- $q(x) \neq p(x)$.

שיטות בניית פולינומי אינטרפולציה

אינטרפולציה ישירה

• בסיס ישיר : $\Phi_i(x) = x^i$

• מטריצת A כאן נקראת מטריצת Vandermonde

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

• פולינום ישיר: $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$

A - ill-conditioned

• $\det(A) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

אינטרפולצית Lagrange

- המטרה : הצגת A כמטריצת יחידה (מקדמים $\alpha_i = y_i$)

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_1(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

- בניית בסיס לגרנז' :

$$\Phi_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \doteq L_j \quad \Leftarrow \quad A = \begin{cases} \Phi_j(x_i) = 0, & i \neq j \\ \Phi_j(x_i) = 1, & i = j \end{cases}$$

- פולינום לגרנז' :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x)$$

אינטרפולציה ניוטון

- המטרה : הצגת A כמטריצה משולשת (מקדמים α_i נמצא ע"י חילוק לפנים)

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_0(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

- בניית בסיס ניוטון:

$$\Phi_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i), \quad \Phi_0(x) = 1 \iff$$

$$\begin{aligned} \Phi_j(x_i) &\neq 0, \quad i \geq j \\ \Phi_j(x_i) &= 0, \quad i < j \end{aligned}$$

- פולינום ניוטון :

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

• תכונות של פולינום ניוטון : $\Phi_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$

▪ $\Phi_0(x) = 1 \Leftrightarrow$ עמודה ראשונה של מטריצה A היא אחדים

▪ פונקציות הבסיס אפשר לקבל רקורסיבית :
 $\Phi_0(x) = 1$
 $\Phi_{i+1}(x) = \Phi_i(x)(x - x_i)$

▪ מקדמים α_i אפשר לחשב בצורה רקורסיבית

$$\alpha_0 = y_0 \quad (= P(x_0))$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_k(x_{k+1})}{\Phi_{k+1}(x_{k+1})}$$

▪ הוספת נקודת אינטרפולציה מביאה להוספת איבר לפולינום הקיים
 בלי לשנות את האיברים הקודמים

$$\alpha_0 = y_0 \quad (= P(x_0))$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_k(x_{k+1})}{\Phi_{k+1}(x_{k+1})}$$

• הוכחת

נסמן

$$P_k(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \alpha_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})$$

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + \alpha_{k+1}\Phi_{k+1}(x)$$

אזי

כיוון שנוספה תצפית (x_{k+1}, y_{k+1}) אפשר לחשב את α_{k+1} :

$$y_{k+1} = P_{k+1}(x_{k+1}) = P_k(x_{k+1}) + \alpha_{k+1}\Phi_{k+1}(x_{k+1})$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_k(x_{k+1})}{\Phi_{k+1}(x_{k+1})}$$

מכאן

מ.ש.ל.

נתבונן בפולינום ניוטון ריבועי: $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1)$

$$y_0 = P(x_0) = \alpha_0$$

$$y_1 = P(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = P(x_2) = \alpha_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} y_0 = \alpha_0 \doteq f[x_0] \\ y_1 = \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \end{array} \right\} \alpha_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \doteq f[x_1, x_0]$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\ y_2 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned} \right\} \alpha_2 = \frac{(y_2 - y_1) - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

שיטת חישוב מקדמי פולינום ניוטון : הפרשים מחולקים (Divided differences)

באופן כללי :

הפרשים מחולקים מסדר ראשון : $f[x_i] = f(x_i)$

הפרשים מחולקים מסדר שני :

$$f[x_{i+1}, x_i] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

הפרשים מחולקים מסדר $k+1$:

$$f[x_{i+k}, \dots, x_{i+1}, x_i] = \frac{f[x_{i+k}, \dots, x_{i+1}] - f[x_{i+k-1}, \dots, x_i]}{x_{i+k} - x_i}$$

אפשר להראות כי $\alpha_i = f[x_i, x_{i-1}, \dots, x_0]$

הפרשים מחולקים

קל לארגן חישובים ידניים באמצעות טבלה. נדגים כאן הטבלה המתאימה לקבוצה של חמש נקודות אינטרפולציה $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

x_0	$y_0 = \alpha_0$	$f_{10} = \alpha_1$	$f_{210} = \alpha_2$	$f_{3210} = \alpha_3$	$f_{43210} = \alpha_4$
x_1	y_1	f_{21}	f_{321}	f_{4321}	
x_2	y_2	f_{32}	f_{432}		
x_3	y_3	f_{43}			
x_4	y_4				

$$f[x_{i+k}, \dots, x_{i+1}, x_i] = \frac{f[x_{i+k}, \dots, x_{i+1}] - f[x_{i+k-1}, \dots, x_i]}{x_{i+k} - x_i}$$

דוגמא

עבור הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ ונקודות האינטרפולציה

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 16$$

מצאו את פולינום האינטרפולציה בצורת ניוטון.

פתרון

נבנה טבלה של הפרשים מחולקים

1	1		
4	2	$\frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$	
16	4	$\frac{4-2}{16-4} = \frac{1}{6}$	$\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}{16-1} = -\frac{1}{90}$

ונקבל

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{90}(x-1)(x-4)$$

שגיאת אינטרפולציה

שגיאת האינטרפולציה של הפונקציה $f(x)$ ע"י הפולינום $p_n(x)$ בכל נקודה x מוגדרת כ

$$e_n(x) \equiv f(x) - p_n(x)$$

משפט השארית: תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת על הקטע $[a, b]$ וגזירה $n+1$ פעמים. אם $p_n(x)$ פולינום האינטרפולציה מדרגה $n \geq 0$ בנקודות $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ השונות, אזי לכל x קיים $\xi \in [a, b]$, $\xi = \xi(x)$, כך ש

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

בד"כ $f^{(n+1)}(\xi)$ אינו ידוע! אבל לפעמים ניתן לחסום אותו: $|f^{(n+1)}(\xi)| < M$

דוגמה:

מצא ביטוי לשגיאת אינטרפולציה של $f(x)$ ע"י פולינום מסדר ראשון.

$$e_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)(x - x_1)$$

משפט רול:

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) . אם $f(a) = f(b)$ אזי קיימת נקודת ביניים $a < \xi < b$ כך ש- $f'(\xi) = 0$.

משפט רול המוכלל:

(עבור $n \geq 2$) תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ נניח כי הנגזרת $f^{(n-1)}(x)$ קיימת בכל נקודה בקטע (a, b) .
 כמו כן נניח כי $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0$
 עבור $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ אזי קיימת נקודת ביניים $x_1 < \xi < x_n$
 כך ש- $f^{(n-1)}(\xi) = 0$.

הוכחת משפט : יהי z משתנה חדש ונגדיר

$$\Phi(z) = (z - x_0)(z - x_1) \dots (z - x_m)$$

$$G(z) = f(z) - p(z) - R(x)\Phi(z)$$

כאשר $R(x)$ מוגדר כך שמתקיים $G(z) = 0$. אזי, מתקיים כי

$$G(z) = 0 \quad \text{for } z = x, x_0, x_1, \dots, x_m$$

לפי משפט Rolle המוכלל, קיימת נקודה $\xi \in \text{int}(x, x_0, \dots, x_m)$

שבה $G^{(m+1)}(\xi) = 0$. אבל

$$\Phi^{(m+1)}(z) = (m+1)!, \quad p^{(m+1)}(z) = 0 \quad \text{for all } z$$

ונקבל $G^{(m+1)}(z) = f^{(m+1)}(z) - R(x)(m+1)! \Leftrightarrow$ נציב $z = \xi$

$$R(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

נציב את הביטוי בהגדרה של $G(z)$

$$G(z) = f(z) - p(z) - R(x)\Phi(z)$$

ו- $z=x$. כיוון ש- $G(x)=0$ נקבל

$$f(x) - p(x) - \Phi(x) \cdot \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} = 0$$



$$e_n(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

מ.ש.ל

שגיאת אינטרפולציה בצורת ניוטון (Next Term Rule)

אם $f(x) \in C^{n+1}(a,b)$, קיים פולינום אינטרפולציה בנקודות $x_0, x_1, \dots, x_n, t$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

בנקודה t : $f(t) = P_{n+1}(t)$. נשים $t=x$:

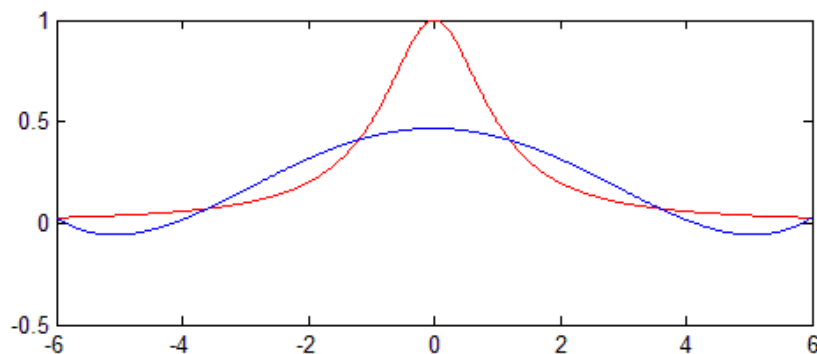
$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

קיבלנו מקודם

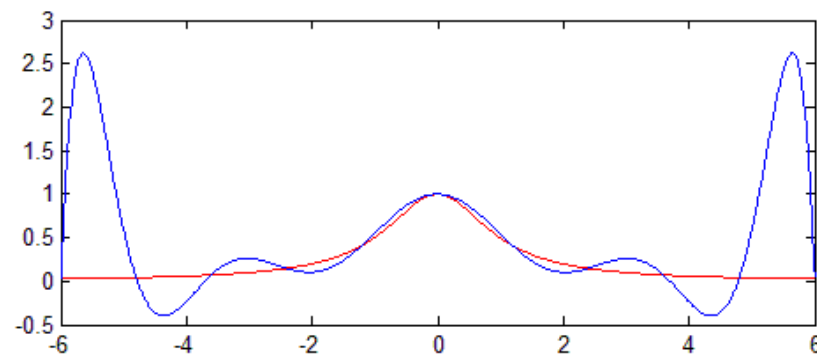
$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

מתקבל, כי קיים $\xi \in (a,b)$ כך ש

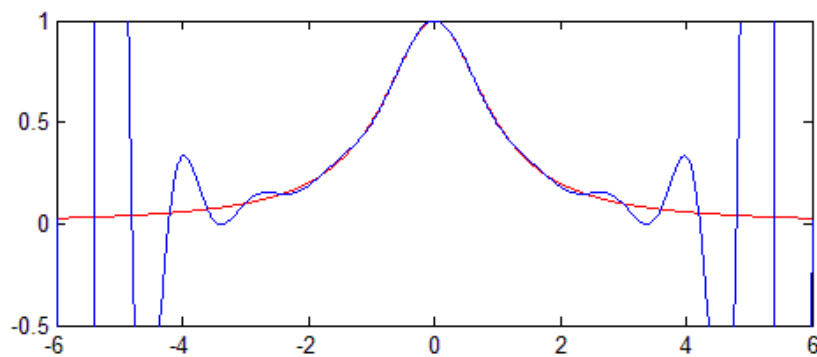
$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$



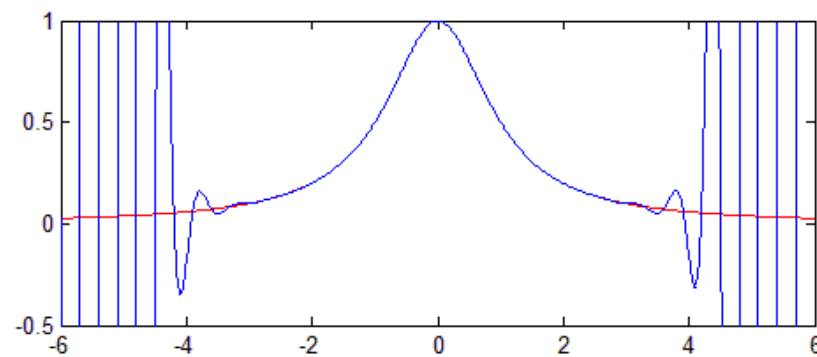
(a)



(b)



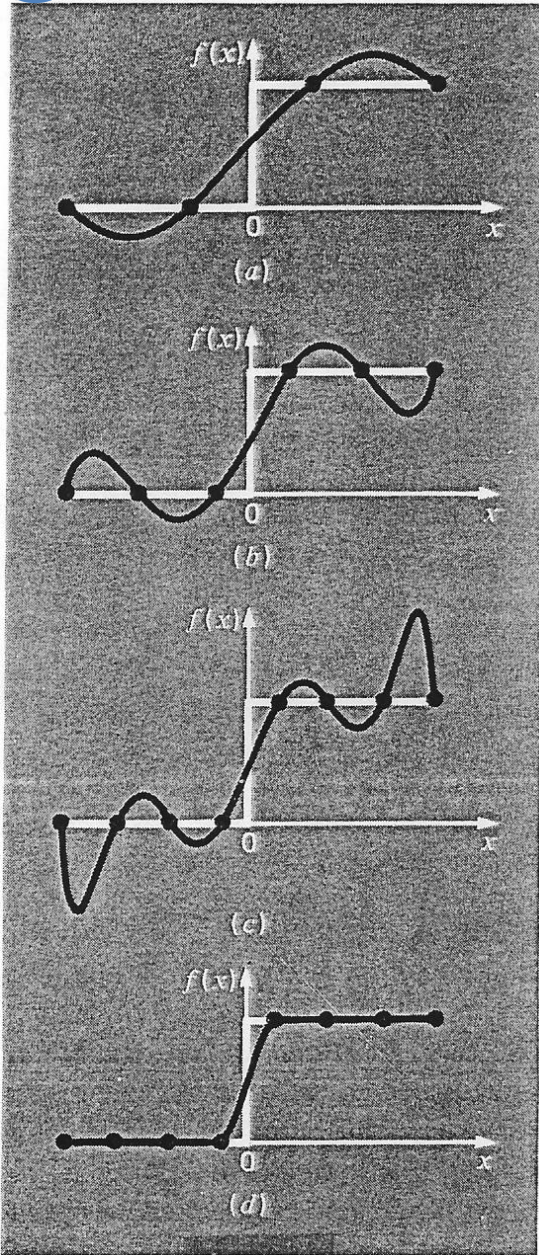
(c)



(d)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} : \quad (a) \ n=6 \quad (b) \ n=10 \quad (c) \ n=20 \quad (d) \ n=40$$

אינטרפולציה ע"י ספלאיין (spline)



- באינטרפולציה ע"י פולינום בנינו **פולינום יחיד** העובר דרך כל נקודות הטבלה ($n+1$ נק')

- ראינו שהפולינום יוצר בעיית האוסצילציות ככל ש n גדל.

- אינטרפולציה ע"י פולינום בד"כ לא מתכנסת כאשר $n \rightarrow \infty$.

- הבעיה חמורה עוד יותר אם הפונקציה לא חלקה.

אפשרות אחרת – למצוא מספר פולינומים,

כל אחד העובר דרך סט של נקודות.

האינטרפולציה החדשה תהיה חלקה כך

שבכל נקודת חיבור בין 2 פולינומים

יש רציפות לא רק של הפולינום אלא גם

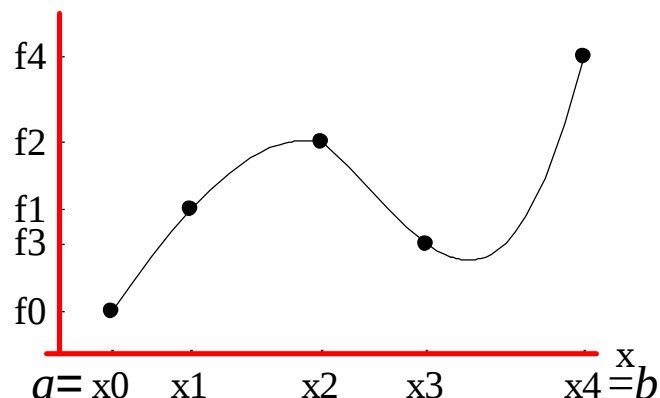
הנגזרות!

ספלאין קובי (cubic spline)

הגדרה: $g(x)$ נקרא ספלאין מדרגה $n \geq 3$ אם:

א $g(x)$ הינו פולינום מדרגה קטנה או שווה ל n על כל תת קטע $[x_i, x_{i+1}]$

ב $g^{(r)}(x)$ רציפה על $[a,b]$ לכל $0 \leq r \leq n-1$



נתונה פונקציה $f(x)$ על הקטע $[a,b]$

ו הנקודות $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Cubic Spline הכי נפוץ.

על כל קטע (x_i, x_{i+1}) ישנו פולינום מדרגה 3. ז"א:

$$g_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

יש n קטעים ולכן ישנם $4n$ נעלמים (a_i, b_i, c_i, d_i)

נבדוק כמה משוואות יש:

$$\begin{array}{ll}
 g(x_i) = f(x_i) & i = 0, 1, \dots, n \rightarrow n+1 \text{ equations} \\
 \left. \begin{array}{l}
 g(x_i - 0) = g(x_i + 0) \\
 g'(x_i - 0) = g'(x_i + 0) \\
 g''(x_i - 0) = g''(x_i + 0)
 \end{array} \right\} & i = 1, \dots, n-1 \rightarrow \frac{3(n-1) \text{ equations}}{\text{סה"כ } 4n-2 \text{ משוואות}}
 \end{array}$$

חסרות 2 משוואות. נוסיף אותן כ-2 "תנאי שפה" ב x_0, x_n :

א- ספלאין טבעי: כאשר אין נתונים נוספים אז קובעים $g''(x_0) = g''(x_n) = 0$

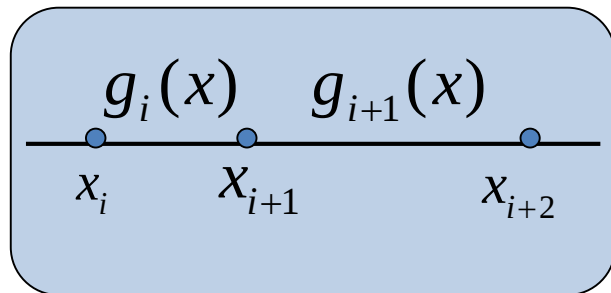
ב- ספלאין מלא: אם ידועות הנגזרות אזי $g'(x_0) = f'(x_0), g'(x_n) = f'(x_n)$

ספלאין טבעי (natural spline); ספלאין מלא (clamped spline)

$$g_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

$$g'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

$$g''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$



נגדיר $h_i = x_{i+1} - x_i$

נשכתב תנאי הספלאין :

- $g_i(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) :$

$$a_i = y_i$$

- $g_i(x_{i+1}) = g_{i+1}(x_{i+1}) \Rightarrow g_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad (i = 0, \dots, n-2) :$

$$a_i + h_i b_i + h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = y_{i+1}$$

- $g'_i(x_{i+1}) = g'_{i+1}(x_{i+1}), \quad (i = 0, \dots, n-2) :$

$$b_i + 2h_i c_i + 3h_i^2 d_i - b_{i+1} = 0$$

- $g''_i(x_{i+1}) = g''_{i+1}(x_{i+1}), \quad (i = 0, \dots, n-2) :$

$$2c_i + 6h_i d_i - 2c_{i+1} = 0$$

קיבלנו מערכת ב $4n-2$ משוואות

ניסוח אלטרנטיבי

אפשר להקטין את מספר המשוואות בצורה משמעותית.

• נגדיר משתנים חדשים : $S_i = g_i''(x_i) = 2c_i$ או $c_i = \frac{S_i}{2}$

• נשכתב את תנאי הספלאין

• $g_i''(x_{i+1}) = g_{i+1}''(x_{i+1}), (i=1, \dots, n-1) :$

$$\Rightarrow 2c_i + 6h_i d_i - 2c_{i+1} = 0 \Rightarrow S_i + 6h_i d_i - S_{i+1} = 0 \Rightarrow d_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i}$$

• $g_i(x_i) = y_i, g_i(x_{i+1}) = y_{i+1} (i=1, \dots, n-1) :$

$$\Rightarrow a_i + h_i b_i + h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = y_{i+1} \Rightarrow b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{2} S_i - \frac{h_i}{6} (S_{i+1} - S_i)$$

• $g_i'(x_{i+1}) = g_{i+1}'(x_{i+1}), (i=1, \dots, n-1) \Rightarrow b_i + 2h_i c_i + 3h_i^2 d_i - b_{i+1} = 0$

$$h_i S_i + 2(h_i + h_{i+1}) S_{i+1} + h_{i+1} S_{i+2} = 6 \left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \right]$$

ספלאין קובי

קיבלנו מערכת ב- $n+1$ נעלמים $S_0, S_1, \dots, S_n$:

$$h_i S_i + 2(h_i + h_{i+1}) S_{i+1} + h_{i+1} S_{i+2} = 6 \left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \right]$$



תנאי שפה



$$\begin{bmatrix} \text{depends} & & & & \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & \\ & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \\ & & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ & & & \ddots & \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ \text{depends} & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \text{depends} & & & & \\ \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} & & & & \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} & & & & \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} & & & & \\ \text{depends} & & & & \end{bmatrix}$$

ספלאין קובי טבעי (Natural Cubic Spline)

$$S_0 = S_n = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{depends} \\ \left[\begin{array}{cccc} h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \\ & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ & & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ & & & \ddots & \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix} \\ \text{depends} \end{array}$$



$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ & & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

ספלאין קובי מלא (Clamped Cubic Spline)

$$g'(x_0) = f'(x_0) = A, g'(x_n) = f'(x_n) = B$$



$$2h_0S_0 + h_0S_1 = 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - A\right)$$

$$h_{n-1}S_{n-1} + 2h_{n-1}S_n = 6\left(B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$



$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & & & & \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_0}{h_0} - A \\ \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$g'_0(x_0) = b_0 = A = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{2} S_0 - \frac{h_0}{6} (S_1 - S_0) \Rightarrow \frac{h_0}{2} S_0 + \frac{h_0}{6} (S_1 - S_0) = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - A$$

$$\Rightarrow 2h_0 S_0 + h_0 S_1 = 6 \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - A \right)$$

$$g'_{n-1}(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 = B$$

$$\Rightarrow \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{2} S_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{6} (S_n - S_{n-1}) + S_{n-1} h_{n-1} + 3 \frac{S_n - S_{n-1}}{6 h_{n-1}} h_{n-1}^2 = B$$

$$\Rightarrow -\frac{h_{n-1}}{2} S_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{6} (S_n - S_{n-1}) + S_{n-1} h_{n-1} + \frac{S_n - S_{n-1}}{2} h_{n-1} = B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

$$\Rightarrow -3h_{n-1} S_{n-1} - (S_n - S_{n-1}) h_{n-1} + 6S_{n-1} h_{n-1} + 3(S_n - S_{n-1}) h_{n-1} = 6 \left(B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right)$$

$$\Rightarrow (-3h_{n-1} + h_{n-1} + 6h_{n-1} - 3h_{n-1}) S_{n-1} + (-h_{n-1} + 3h_{n-1}) S_n = 6 \left(B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right)$$

$$\Rightarrow h_{n-1} S_{n-1} + 2h_{n-1} S_n = 6 \left(B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right)$$

מצאו קירוב *natural cubic spline* עבור אוסף נקודות הדגימה הבאות:

$$(-1,4), (0,1), (1,2), (2,6), (3,5)$$

האוסף הנתון מכיל נקודות דגימה במרחקים שווים ולפיכך עבור כל קטע מתקיים כי $h_i = 1$. מכיוון שאנו משתמשים ב-*natural spline* אזי מתקיים כי $S_0 = S_4 = 0$. לפיכך, נקבל מערכת של 3 משוואות עם 3 נעלמים:

$$\begin{bmatrix} 2(1+1) & 1 & 0 \\ 1 & 2(1+1) & 1 \\ 0 & 1 & 2(1+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} \frac{2-1}{1} - \frac{1-4}{1} \\ \frac{6-2}{1} - \frac{2-1}{1} \\ \frac{5-6}{1} - \frac{6-2}{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 18 \\ -30 \end{bmatrix}$$

פתרון המערכת הוא: $S_1 = 4.607$ $S_2 = 5.57$ $S_3 = -8.89$

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & & \ddots & \\ h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

דוגמא (המשך)

נחשב את המקדמים של העקומה g_0 :

$$d_0 = \frac{(S_1 - S_0)}{6h_0} = \frac{4.607}{6} = 0.768 \quad c_0 = \frac{S_0}{2} = 0$$

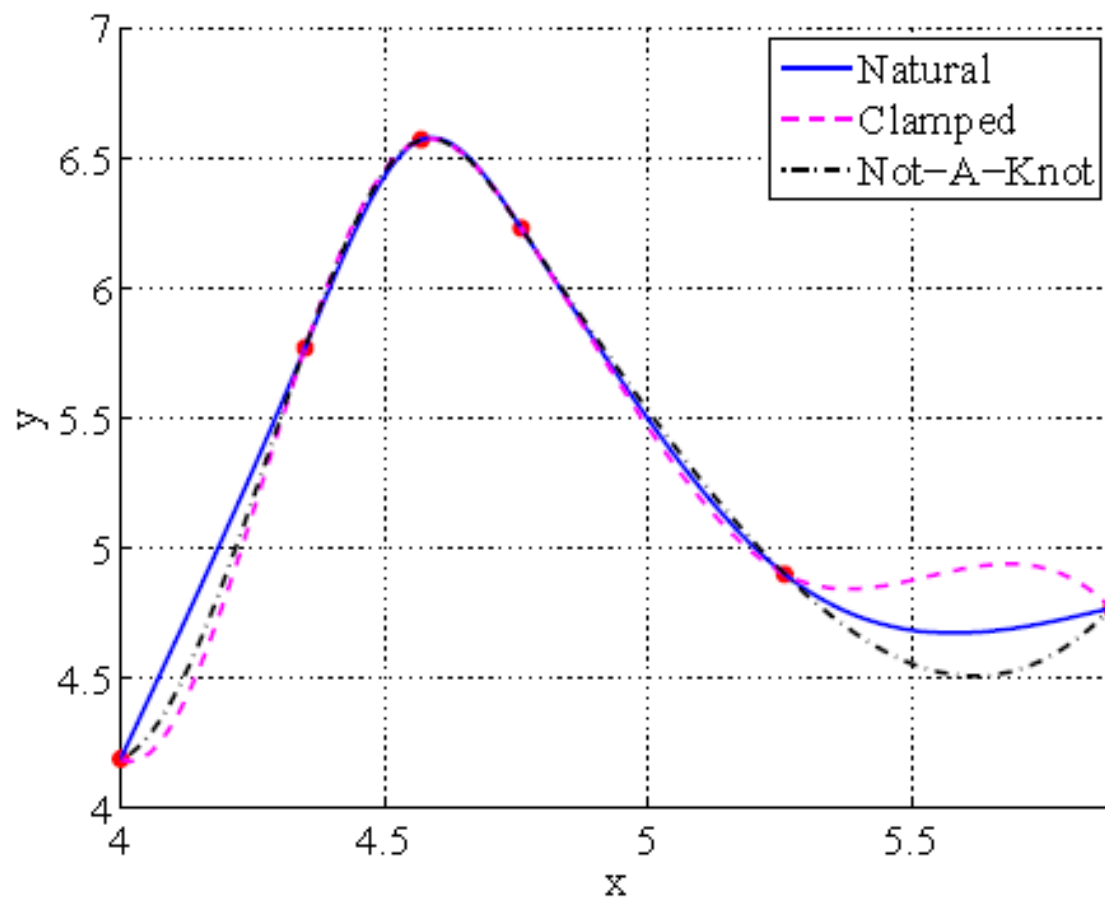
$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{2h_0S_0 + h_0S_1}{6} = \frac{1 - 4}{1} - \frac{0 + 4.607}{6} = -3.768 \quad a_0 = y_0 = 4$$

$$\Rightarrow g_0(x) = 0.768(x + 1)^3 - 3.768(x + 1) + 4$$

נוכל להמשיך באותו האופן עבור כל קטע בין 2 נקודות ונקבל את הקירוב הבא:

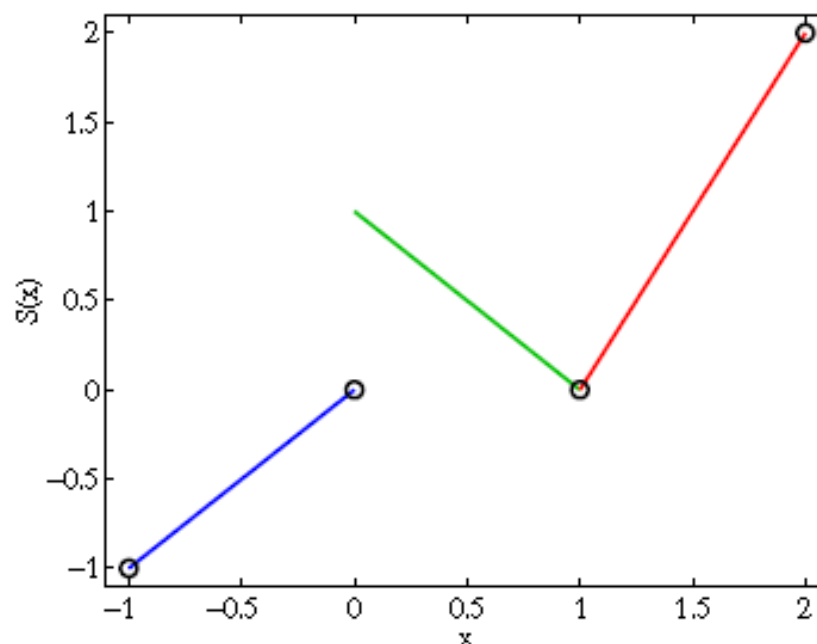
$$g(x) = \begin{cases} 0.768(x + 1)^3 - 3.768(x + 1) + 4 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0.1607x^3 + 2.304x^2 - 1.464x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2.4107(x - 1)^3 + 2.7857(x - 1)^2 + 3.625(x - 1) + 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1.482(x - 2)^3 - 4.4464(x - 2)^2 + 1.964(x - 2) + 6 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

השוואה בין ספלאיינים



האם הפונקציה הבאה יכולה להיות ספלאיין ?

$$S(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0] \\ 1-x, & x \in (0, 1) \\ 2x-2, & x \in [1, 2] \end{cases}$$



האם הפונקציה הבאה יכולה להיות ספלאיין ?

$$Q(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1-2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} Q(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} Q(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} Q'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} Q'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x = -2$$

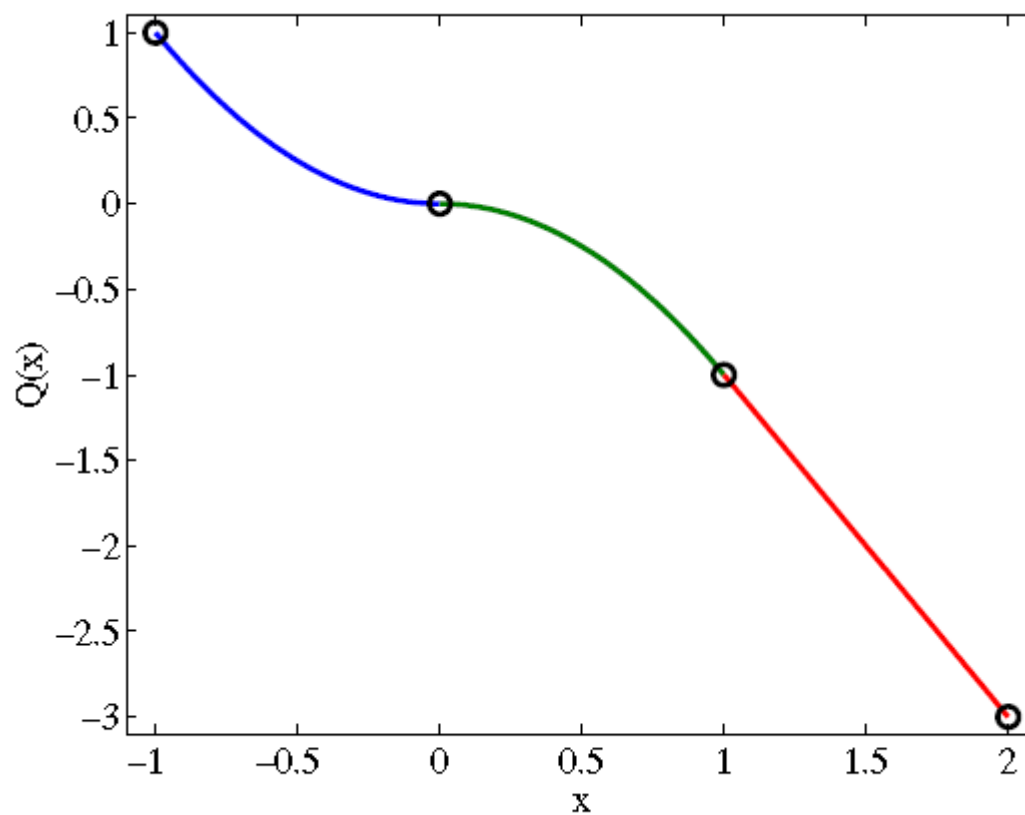
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Q(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} Q(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-2x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Q'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} Q'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2) = -2$$

$$Q(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1-2x, & x \geq 1 \end{cases}$$



שגיאת אינטרפולציה

משפט : תהי $f \in C^4[a, b]$ עם $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = \|f^{(4)}\|$ אם $g(x)$ הוא

ספלאין קובי יחיד עבור f ביחס לנקודות אינטרפולציה

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, אזי לכל $x \in [a, b]$ מתקיים

$$|f(x) - g(x)| \leq Ch^4 \|f^{(4)}\|, \quad h = \max_{0 \leq j \leq n-1} (x_{j+1} - x_j)$$