

בוחן מתמטיקה בדידה – סמסטר קיץ תיכוניסטים תשפ"ו

הצעת פתרון באדיבות עדי מכנס

1. (15 נקודות לסעיף) תהא A קבוצה ויהיו R_1, R_2 שני יחסי סדר על A . נתון כי $R_1 \subseteq R_2$. יהא $a \in A$.
א. הוכיחו או הפריכו: אם a הוא איבר מינימאלי בקבוצה A עם היחס R_2 אז a איבר מינימאלי בקבוצה A עם היחס R_1 .

פתרון:

נוכיח את הטענה. יהי $b \in A$ כך ש bR_1a . נוכיח כי $b = a$. ע"פ הנתון מתקיים כי $(b, a) \in R_1$, אך כיוון שנתון כי $R_1 \subseteq R_2$ בהכרח מתקיים ש $(b, a) \in R_2$, ובעצם bR_2a . כיוון שתחת R_2 מתקיים ש a הוא מינימלי, בהכרח מתקיים ש $b = a$ כנדרש. משל ■.

- ב. הוכיחו או הפריכו: אם a הוא איבר מינימאלי בקבוצה A עם היחס R_1 אז a איבר מינימאלי בקבוצה A עם היחס R_2 .

פתרון:

נפיק את הטענה. קודם אצייר אינטואיציה ולאחר מכן נפרמל. נביט בקבוצה $A = \{1, 2\}$. ניקח את $R_1 = I$ יחס הזהות (אכתוב הגדרה מסודרת אח"כ), כלומר:

$$R_1: \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}$$

ואת R_2 להיות היחס הבא:

$$R_2: \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ 1 \end{array}$$

כלומר, נגדיר:

$$R_1 = I = \{(1,1), (2,2)\}$$

ואת:

$$R_2 = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$$

קל לוודא כי אכן R_1, R_2 שניהם יחסי סדר [חלקיים] וכן כי $R_1 \subseteq R_2$. ב R_1 מתקיים כי 2 הוא מינימלי, אך ב R_2 מתקיים ש 2 אינו מינימלי (כי $1R_22$).

- ג. הוכיחו או הפריכו: אם a הוא איבר קטן ביותר בקבוצה A עם היחס R_1 אז a איבר קטן ביותר בקבוצה A עם היחס R_2 .

פתרון:

נוכיח את הטענה. יהי $b \in A$. צריך להוכיח כי aR_2b . כיוון ש a הוא קטן ביותר ב R_1 , בפרט עבור b מתקיים כי aR_1b , כלומר $(a,b) \in R_1$. ע"פ הנתון מתקיים כי $R_1 \subseteq R_2$ ולכן $(a,b) \in R_2$, כלומר aR_2b כנדרש. משל ■.

ד. הוכיחו או הפריכו: אם a הוא איבר קטן ביותר בקבוצה A עם היחס R_2 אז a איבר קטן ביותר בקבוצה A עם היחס R_1 .

פתרון:

נפריך את הטענה. ניקח את אותה הקבוצה A ואת אותם היחסים מסעיף ב'.

$$R_1 = I = \{(1,1), (2,2)\}$$

$$R_2 = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$$

ב R_2 מתקיים ש 1 הוא איבר קטן ביותר, אך 1 אינו קטן ביותר ב R_1 , כיוון ש $1R_12$.

2. (20 נקודות לסעיף) תהא A קבוצה ותהא $\mathbb{P} \subseteq \mathcal{P}(A)$ חלוקה של A .

לכל יחס R על A , נסמן $R_{\mathbb{P}} = \bigcup_{X \in \mathbb{P}} (R \cap (X \times X))$ את היחס

כעת נגדיר יחס T על קבוצת היחסים על A , היינו נגדיר יחס T על $\mathcal{P}(A \times A)$ כך: $RTS \Leftrightarrow R_{\mathbb{P}} = S_{\mathbb{P}}$.

א. יהיו R, S שני יחסים על A . הוכיחו כי $R_{\mathbb{P}} = S_{\mathbb{P}}$ אממ לכל $X \in \mathbb{P}$ מתקיים $R \cap (X \times X) = S \cap (X \times X)$.

פתרון:

נוכיח את שני הכיוונים.

בכיוון $\Leftarrow$ נניח כי $R_{\mathbb{P}} = S_{\mathbb{P}}$ ונוכיח שלכל $X \in \mathbb{P}$ מתקיים $R \cap (X \times X) = S \cap (X \times X)$.

תהי $Y \in \mathbb{P}$. נוכיח את ההכלה $\subseteq$ שכן הכיוון השני סימטרי לחלוטין. יהי $x \in R \cap (Y \times Y)$. לכן בפרט x שייך לאיחוד הכללי

$$x \in \bigcup_{X \in \mathbb{P}} (R \cap (X \times X))$$

(עבור $X = Y$) כלומר $x \in R_{\mathbb{P}}$. ע"פ הנתון מתקיים כי $R_{\mathbb{P}} = S_{\mathbb{P}}$ ולכן $x \in S_{\mathbb{P}}$. כיוון שכך, קיימת $Z \in \mathbb{P}$ כך ש

$$x \in S \cap (Z \times Z)$$

נבחין כי בפרט מתקיים כי:

$$x \in (Y \times Y) \cap (Z \times Z)$$

ולכן אם נסמן $x = (a, b)$, נקבל כי:

$$a \in Y \wedge a \in Z$$

$$b \in Y \wedge b \in Z$$

(הסבר למעוניינים: מתקיים כי

$$\begin{cases} (a,b) \in Y \times Y \Leftrightarrow a \in Y \wedge b \in Y \\ (a,b) \in Z \times Z \Leftrightarrow a \in Z \wedge b \in Z \end{cases}$$

ובסידור ה $\wedge$ מקבלים את הטענה שלנו) כלומר:

$$a \in Y \cap Z$$

ובפרט $Y \cap Z \neq \emptyset$. ע"פ ההגדרה של חלוקה, נקבל מכאן כי $Y = Z$ ולכן בסה"כ:

$$x \in S \cap (Y \times Y)$$

כמבוקש.

בכיוון $\Rightarrow$ נניח כי לכל קבוצה $X \in \mathbb{P}$ מתקיים כי $R \cap (X \times X) = S \cap (X \times X)$, ונוכיח כי $R_{\mathbb{P}} = S_{\mathbb{P}}$. כאמור, נוכיח את ההכלה $\subseteq$ שכן ההכלה בכיוון השני סימטרית לחלוטין.

יהי $x \in R_{\mathbb{P}}$, ונוכיח כי $S_{\mathbb{P}}$. לכן מהגדרת האיחוד הכללי, קיימת קבוצה $Y \in \mathbb{P}$ כך ש:

$$x \in R \cap (Y \times Y)$$

אבל נתון כי לכל $X \in \mathbb{P}$ יש שוויון, בפרט עבור Y נקבל:

$$x \in S \cap (Y \times Y)$$

ולכן מהגדרת האיחוד הכללי, מתקיים כי $x \in S_{\mathbb{P}}$. משל ■.

ב. הוכיחו כי T הוא יחס שקילות.

פתרון:

עלינו להראות ש T מקיים רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות.

רפלקסיביות: יהי יחס R על A , לכן ודאי כי:

$$R_{\mathbb{P}} = R_{\mathbb{P}}$$

שהרי כל קבוצה שווה לעצמה.

סימטריות: יהיו יחסים R, S על A כך ש RTS . לכן $R_{\mathbb{P}} = S_{\mathbb{P}}$ ומסימטריות של שוויון קבוצות נקבל כי $S_{\mathbb{P}} = R_{\mathbb{P}}$ ובעצם STR .

טרנזיטיביות: יהיו יחסים R, S, Q על A כך ש $RTS \wedge STQ$. כיוון שכך מתקיים כי $R_{\mathbb{P}} = S_{\mathbb{P}} \wedge S_{\mathbb{P}} = Q_{\mathbb{P}}$. לכן מטרנזיטיביות של שוויון קבוצות מתקיים כי $R_{\mathbb{P}} = Q_{\mathbb{P}}$, כלומר RTQ כמו שרצינו. משל ■.

ג. נניח כי הקבוצה A והחלוקה $\mathbb{P}$ הנתונות בשאלה הם: $A = \{1,2,3,4,5\}$ והחלוקה $\mathbb{P} = \{\{1,2\}, \{3,4,5\}\}$.

נתבונן ב $R = A \times A$ שהינו יחס שקילות על A . כמה יחסי שקילות S (על A) מקיימים כי RTS ?

פתרון:

ראשית נראה מהו $R_{\mathbb{P}}$. איני בטוח אם זה יעזור לפתרון אבל לאינטואיציה כן. זכרו שלכל תת קבוצה $X \subseteq A$ מתקיים כי $X \times X \subseteq A \times A$, ולכן:

$$R_{\mathbb{P}} = \bigcup_{X \in \mathbb{P}} (R \cap (X \times X)) = \bigcup_{X \in \mathbb{P}} (X \times X)$$

שזהו למעשה היחס המושרה מהחלוקה $\mathbb{P}$. מדוע זה נכון? שימו לב כי $(a, b) \in R_{\mathbb{P}}$ אם ורק אם קיימת $X \in \mathbb{P}$ כך ש $(a, b) \in X \times X$, כלומר ששניהם נמצאים באותה קבוצה בחלוקה (שכן $a \in X \wedge b \in X$).

על מנת שיחס שקילות S יקיים ש $R_{\mathbb{P}} = S_{\mathbb{P}}$, נקבל מסעיף א' תנאי מספיק והכרחי:

$$\forall X \in \mathbb{P}: R \cap (X \times X) = S \cap (X \times X)$$

במקרה שלנו, שני התנאים הבאים:

$$S \cap (\{1,2\} \times \{1,2\}) = \{1,2\} \times \{1,2\}$$

$$S \cap (\{3,4,5\} \times \{3,4,5\}) = \{3,4,5\} \times \{3,4,5\}$$

כלומר, כמות כל יחסי השקילות S שמקיימים:

$$\{1,2\} \times \{1,2\} \subseteq S$$

$$\{3,4,5\} \times \{3,4,5\} \subseteq S$$

הסבר נכון אך פחות פורמלי: אם נוסיף עוד זוג ל S , אזי נקבל מחלקת שקילות אחת. אז או שלא נוסיף איבר כלל (כלומר היחס המושרה) או שנוסיף את כל האפשרויות כדי לקבל מחלקת שקילות אחת.

פורמלית: האם ייתכן שישנו זוג $(a, b) \in S$ כך ש $a \in \{1,2\}$ ו $b \in \{3,4,5\}$? אם $S \neq R_{\mathbb{P}}$ (היחס המושרה בעצמו, "הכי קטן") או ש $S \neq R$ (היחס המלא, "הכי גדול") זה אומר שישנו זוג $(a, b) \notin S$ וזוג $(c, d) \in S$ כך שמתקיים כי $a, c \in \{1,2\} \wedge b, d \in \{3,4,5\}$ (אפשר להניח כן מסימטריות, אחרת נשנה את סדר האיברים). כעת:

$$aSc$$

משום שהם באותה הקבוצה $S \cap (\{1,2\} \times \{1,2\}) = \{1,2\} \times \{1,2\}$ (לפי מה שאמרנו) וכן

$$dSb$$

משום ש $(d, b) \in \{3,4,5\} \times \{3,4,5\} \subseteq S$. כעת מכיוון ש cSd אז נובע כי cSb , שהרי מטרנזיטיביות:

$$cSd \wedge dSb \rightarrow cSb$$

ולכן גם aSb , שכן:

$$aSc \wedge cSb \rightarrow aSb$$

בסתירה.

סה"כ, יש בדיוק שני יחסי שקילות ב $[R]_{\mathbb{T}}$.