תרגיל 11 בפונקציות מרוכבות

1. הראו כי

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\pi$$

רמז: לעניות דעתי יהיה יותר קל לפשט קצת את האינטגרל לפני שעוברים לאינטגרל מרוכב.

פתרון:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3-\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

נציב $t = 2\theta$ ולכן $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{3-\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{4\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t$$

קל לראות ש

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t$$

(מי שמתעקש יכול להוכיח זאת ע"י הצבה של $\varphi = t - 2\pi$) ולכן

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t$$

עכשיו נבצע הצבה מרוכבת

$$\begin{aligned} z &= e^{it} \\ \mathrm{d}z &= ie^{it}\mathrm{d}t = iz\mathrm{d}t \\ \cos t &= \frac{z+\bar{z}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{2}{3-(\frac{z+\bar{z}}{2})}\frac{1}{iz}\mathrm{d}z &= \int_{|z|=1} \frac{4}{6-z-\bar{z}}\frac{1}{iz}\mathrm{d}z = 4i\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2-6z+1}\mathrm{d}z \\ &= 4i\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-(3-\sqrt{8}))(z-(3+\sqrt{8}))}\mathrm{d}z \end{aligned}$$

נשים לב ש $3-\sqrt{8}$ היא סינגולריות בתוך התחום ו $3+\sqrt{8}$ מחוצה לו. קל לראות ש

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{(z-(3-\sqrt{8}))(z-(3+\sqrt{8}))},3-\sqrt{8})=\frac{1}{3-\sqrt{8}-3-\sqrt{8}}=-\frac{1}{2\sqrt{8}}$$

ולכן לפי משפט השאריות

$$4i\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{(z-(3-\sqrt{8}))(z-(3+\sqrt{8}))}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot 4i\cdot(-\frac{1}{2\sqrt{8}})=\sqrt{2}\pi$$

כנדרש.

2. חשבו את:

פתרון: בכל השאלה הזאת נסמן $\Gamma_R=\{z\mid z\in\mathbb{R}\quad -R\le z\le R\}\cup\{z\mid \mathrm{Im}(z)\ge 0\quad |z|=1\}$ מסילה המכוונת עם כיוון השעון, ו $\Delta_R=\{z\mid \mathrm{Im}(z)\ge 0\quad |z|=1\}$ כנ"ל. לכן ברור שלכל פונקציה $f(z)$

$$\int\limits_{\Gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=\int\limits_{\Delta_R}f(z)\mathrm{d}z+\int\limits_{-R}^{R}f(z)\mathrm{d}z$$

(א) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}$$

פתרון: ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (לפי השוואה עם $\frac{1}{x^2}$) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x$$

נגדיר

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-2z+5)^2}=\frac{1}{(z-(1+2i))^2(z-(1-2i))^2}$$

לכן אם R מספיק גדול (נניח $R>5$) אז כל הסינגולריות שיש לפונקציה בחצי המישור העליון (במקרה הזה, $1+2i$) נמצאים כבר בתוך Γ_R ולכן לפי משפט השאריות

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{1}{(z-(1+2i))^2(z-(1-2i))^2}\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),1+2i)$$

כמובן ש $1+2i$ הוא קוטב מסדר 2 ולכן אם נסמן

$$g(z)=\frac{1}{(z-(1-2i))^2}$$

השארית היא

$$\mathrm{Res}(f(z),1+2i)=\lim_{z\to1+2i}g'(z)=\lim_{z\to1+2i}\frac{-2}{(z-(1-2i))^3}=\frac{-2}{-64i}=-\frac{i}{32}$$

ולכן

$$\int\limits_{\Gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\frac{-i}{32}=\frac{\pi}{16}$$

לכל $R>5$. כעת נעבור לאינטגרל

$$\int\limits_{\Delta_R}f(z)\mathrm{d}z=\int\limits_{\Delta_R}\frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\mathrm{d}z$$

נוכיח שכאשר $R\to\infty$ האינטגרל שואף ל 0. נתחיל ממה שהוא די ברור, ש $f(z)$ מתנהג בערך כמו $\frac{1}{R^4}$ וליתר דיוק:
נשים לב ש

$$|z^2-2z+5|\geq||z|^2-|-2z+5||=|R^2-|-2z+5||$$

אבל

$$|-2z+5|\leq2|z|+5=2R+5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים

$$R^2\geq2R+5\geq|-2z+5|$$

נקבל ש

$$|z^2-2z+5|\geq|R^2-|-2z+5||=R^2-|-2z+5|\geq R^2-2R-5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (שבהם בפרט R^2-2R-5 חיובי)

$$|f(z)|=|\frac{1}{(z^2-2z+5)^2}|\leq\frac{1}{(R^2-2R-5)^2}$$

נזכור שהאורך של Δ_R הוא πR ולכן לפי משפט על חסם ML מתקיים ש

$$|\int\limits_{\Delta_R}\frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\mathrm{d}z|\leq\frac{\pi R}{(R^2-2R-5)^2}\overset{R\to\infty}{\to}0$$

ולכן אם נזור לשוויון

$$\int\limits_{\Gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=\int\limits_{\Delta_R}f(z)\mathrm{d}z+\int\limits_{-R}^{R}f(z)\mathrm{d}z$$

ונפעיל $\lim\limits_{R\to\infty}$ נקבל ש

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{16}$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}$$

(ב) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (נניח, לפי מבחן דירכלה כי קל לבדוק ש $\frac{x}{x^2-2x+2}$מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x\cos x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$$

נגדיר

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}$$

ואז עבור $z\in\mathbb{R}$ מתקיים ש

$$\frac{x\cos x}{x^2-2x+2} = \operatorname{Re} f(z)$$

כלומר

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\cos x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \operatorname{Re} f(z)\mathrm{d}z = \operatorname{Re}\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z$$

(השיון האחרון נכון כי האינטגרל על תחום ממשי) כלומר הערך המבוקש הוא

$$\operatorname{Re}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}\mathrm{d}z$$

את זה נחשב בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב ש

$$z^2-2z+2 = (z-(1+i))(z-(1-i))$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (כך ש $1+i$ נמצא בתוך Γ_R) אנחנו יודעים לפי משפט השאריות ש

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(z-(1+i))(z-(1-i))}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{(1+i)e^{i-1}}{2i} = \pi(1+i)e^{i-1}$$

כעת לפי משפט ז'ורדן

$$|\int\limits_{\Delta_R} \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}\mathrm{d}z| \leq \pi \max_{z\in\Delta_R} \frac{z}{z^2-2z+2}$$

וכמו קודם בגלל ש $|\frac{z}{z^2-2z+2}|$ הוא בערך $\frac{1}{R}$ נקבל שכאשר R שואף ל ∞ גם האינטגרל שלנו שואף ל 0. ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} \frac{x\cos x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\,\pi(1+i)e^{i-1} = \frac{\pi}{e}\,\mathrm{Re}((1+i)e^{i})$$

$$= \frac{\pi}{e}(\cos 1 - \sin 1)$$

(ג) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

פתרון: ראשית נשים לב שהפונקציה המדוברת זוגית ולכן

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

והאינטגרל בבירור מתכנס ולכן נחשב את

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} \frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

בשיטה הרגילה

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{1}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\mathrm{d}z$$

אם נסמן

$$g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$$

אז נקבל

$$g'(z) = \frac{-2}{(z+i)^3}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i g'(i) = 2\pi i\frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-4\pi i}{-8i} = \frac{\pi}{2}$$

שוב קל לוודא ש

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Delta_R} \frac{1}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z = 0$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

בעוד שאת

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

נחשב עם הפונקציה

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{(1+z^2)^2} = \frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

כרגיל נגדיר

$$g(z) = \frac{e^{2iz}}{(z+i)^2}$$

ואז

$$g'(z) = \frac{2ie^{2iz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{2iz}}{(z+i)^4}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i g'(i) = 2\pi i\frac{2ie^{-2}(-4) - 4ie^{-2}}{16} = e^{-2}\frac{16\pi + 8\pi}{16} = \frac{3\pi}{2e^2}$$

כמו כן אם $|z| = R$ אז עבור ערכי R מספיק גדולים

$$|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$$

ולכן

$$|\frac{1}{(z^2+1)^2}| \leq \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

ואז לפי הלמה של ז'ורדן מתקיים ש

$$|\int\limits_{\Delta_R} \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{(R^2-1)^2}$$

ולכן זה מתכנס ל 0 כאשר R שואף לאינסוף. לסיכום

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \frac{3\pi}{2e^2}$$

ו

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2e^2}) = \frac{\pi}{8}(1+\frac{3}{e^2})$$

(ד) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$

פתרון: לפי הזהות $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ נקבל ש

$$\frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta} = \frac{1}{2}\frac{1+\cos 6\theta}{5-4\cos 2\theta}$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 6\theta}{5-4\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

נבצע הצבה

$$t = 2\theta$$
$$\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}\theta$$

ונקבל

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^{4\pi} \frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int\limits_{2\pi}^{4\pi} \frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t$$

אבל נשים לב שאם מציבים

$$s = t + 2\pi$$

מקבלים ש

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t = \int\limits_{2\pi}^{4\pi} \frac{1+\cos(3s-6\pi)}{5-4\cos(s-2\pi)}\mathrm{d}s = \int\limits_{2\pi}^{4\pi} \frac{1+\cos(3s)}{5-4\cos(s)}\mathrm{d}s$$

ולכן

$$\frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t$$

עכשיו נבצע את ההצבה המרוכבת הטריגונוטרית

$$z=e^{it}$$

$$\mathrm{d}z=iz\mathrm{d}t$$

$$\cos t=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$\cos 3t=\frac{z^3+\frac{1}{z^3}}{2}$$

וקיבלנו את האינטגרל

$$\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{1+\frac{z^3+\frac{1}{z^3}}{2}}{5-2(z+\frac{1}{z})}\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\frac{1}{4i}\int_{|z|=1}\frac{z^3+2+\frac{1}{z^3}}{5-2(z+\frac{1}{z})}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{i}{4}\int_{|z|=1}\frac{z^3+2+\frac{1}{z^3}}{2z-5+\frac{2}{z}}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$=\frac{i}{4}\int_{|z|=1}\frac{z^6+2z^3+1}{(2z^2-5z+2)z^3}\mathrm{d}z$$

זה הזמן לחפש את הסינגולריות של הפונקציה שלנו. ברור שיש סינגולריות ב $z=0$. כמו כן יש סינגולריות ב

$$2z^2-5z+2=0$$

שזה בעצם הנקודות

$$\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}=\frac{1}{2},2$$

הנקודה 2 נמצאת מחוץ למעגל ולכן היא לא משנה לנו. אבל $\frac{1}{2}$ היא סינגולריות שצריך להתחשב בה.

נשתמש במשפט השאריות. ברור ש $\frac{1}{2}$ היא קוטב מסדר 1 (היא לא מאפסת את המונה). ולכן

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^6+2z^3+1}{2(z-\frac{1}{2})(z-2)z^3},\frac{1}{2}\right)=\frac{(\frac{1}{2})^6+2(\frac{1}{2})^3+1}{2(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2})^3}=\frac{\frac{1}{64}+\frac{1}{4}+1}{-\frac{3}{8}}=-\frac{81}{24}=-\frac{27}{8}$$

נרצה לחשב גם שארית ב $z=0$. נשים לב ש

$$\frac{z^6+2z^3}{(2z^2-5z+2)z^3}$$

היא פונקציה אנליטית בסביבת 0 (או ליתר דיוק, הסינגולריות ב $z = 0$ היא סליקה) ולכן

$$\mathrm{Res}(\frac{z^6+2z^3+1}{(2z^2-5z+2)z^3},0) = \mathrm{Res}(\frac{1}{(2z^2-5z+2)z^3},0) = \frac{g''(0)}{2}$$

כאשר

$$g(z) = \frac{1}{2z^2-5z+2}$$

היות ש

$$g'(z) = -\frac{4z-5}{(2z^2-5z+2)^2}$$

$$g''(z) = -\frac{4(2z^2-5z+2)^2 - 2(2z^2-5z+2)(4z-5)^2}{(2z^2-5z+2)^4}$$

ולכן

$$g''(0) = -\frac{16-4\cdot 25}{16} = -\frac{84}{16} = \frac{21}{4}$$

כלומר

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{(2z^2-5z+2)z^3},0) = \frac{21}{8}$$

ולכן לפי משפט השאריות

$$\frac{i}{4}\int\limits_{|z|=1} \frac{z^6+2z^3+1}{(2z^2-5z+2)z^3}\mathrm{d}z = \frac{i}{4}2\pi i(\frac{21}{8}-\frac{27}{8}) = \frac{\pi}{2}(\frac{6}{8}) = \frac{3\pi}{8}$$

וזה האינטגרל המבוקש

3. (אין חובה להגיש תרגיל זה) הראו כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

הדרכה: הביטו באינטגרל

$$\int\limits_{C_N}\frac{1}{z^2\sin\pi z}\mathrm{d}z$$

כאשר C_N הוא ריבוע שמרכזו ב 0 ואורך צלעו $2N+1$.
פתרון: נסתכל בפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{z^2\sin\pi z}$$

הסינגולריות שלה הם בנקודות $\mathbb{Z}$. אם z שלם שאינו 0 אז זה קוטב מסדר 1(כי זו לא סינגולריות של z^2 והשלמים לא מאפסים את הנגזרת של $\sin \pi z$).

נחשב שארית עבור $z = k \neq 0$: אפשר לסמן

$$g(z) = \frac{1}{z^2}$$

ו

$$h(z) = \sin \pi z$$

ואז לפי נוסחא מוכרת

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2 \sin \pi z}, k) = \mathrm{Res}(\frac{g(z)}{h(z)}, k) = \frac{g(k)}{h'(k)} = \frac{1}{k^2 \pi \cos \pi k} = \frac{(-1)^k}{\pi k^2}$$

עכשיו, הנקודה $z = 0$ היא קוטב מסדר 3. כמובן שהשארית של

$$\frac{1}{z^2 \sin \pi z}$$

בנקודה $z = 0$ היא המקדם של z^1 בפיתוח לורן של

$$\frac{1}{\sin \pi z}$$

עכשיו, הטור לורן נראה ככה:

$$\frac{1}{\sin \pi z} = a_{-1}\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

ולכן

$$1 = (a_{-1}\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots) \sin \pi z = (a_{-1}\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots)(\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \dots)$$

לפי השוואת מקדמים נקבל:

השוואה של z^0:

$$1 = \pi a_{-1}$$

כלומר

$$a_{-1} = \frac{1}{\pi}$$

השוואה של z^1:

$$0 = \pi a_0$$

ולכן

$$a_0 = 0$$

השוואה של z^2:

$$0 = -\frac{a_{-1}\pi^3}{3!} + \pi a_1$$

כלומר

$$a_1 = \frac{\pi}{6}$$

כלומר

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2 \sin \pi z}, 0) = \frac{\pi}{6}$$

עכשיו, לפי משפט השארית נקבל ש

$$\int\limits_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} \mathrm{d}z = 2\pi i(\frac{\pi}{6} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{\pi k^2} + \sum_{k=-1}^{-N} \frac{(-1)^k}{\pi k^2})$$

כלומר

$$\int\limits_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} \mathrm{d}z = 2\pi i(\frac{\pi}{6} + 2\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{\pi k^2})$$

כעת אם נצליח להוכיח ש

$$\lim_{N \to \infty} \int\limits_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} \mathrm{d}z = 0$$

זה יגרור ש

$$\frac{\pi}{6} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k^2} = 0$$

כלומר

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

כלומר

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

אם כך כדי לסיים נשאר רק להוכיח כי

$$\lim_{N \to \infty} \int\limits_{C_N} \frac{1}{z^2 \sin \pi z} \mathrm{d}z = 0$$

נבצע זאת כרגיל באמצעות חסם ML. אורך הריבוע הוא

$$4 \cdot (2N+1) = 8N+4$$

כמו כן אם $z \in C_N$ אז

$$|z|^2 \geq N^2$$

ולכן

$$|\frac{1}{z^2}| \leq \frac{1}{N^2}$$

לכן ברור שכדי לסיים צריך רק להראות שהחל מ N מסוים הערך

$$|\frac{1}{\sin \pi z}|$$

כאשר $z \in C_N$ הוא חסום. כמובן שמספיק להראות ש

$$|\frac{1}{\sin^2 \pi z}|$$

חסום. היות ש

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

אז

$$|\sin \pi(x+iy)|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x \cosh^2 y + (1-\sin^2 x)\sinh^2 y$$
$$= \sin^2 x(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

אז צריך להוכיח ש

$$\frac{1}{\sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}$$

חסום על הריבוע הרלוונטי. נראה בנפרד שהוא חסום על קווים אנכיים וקווים אופקיים. על קו אופקי מתקיים ש

$$y = \pm(N + \frac{1}{2})$$

ולכן

$$\sinh^2(\pm\pi(N+\frac{1}{2})) = \sinh^2(\pi(N+\frac{1}{2})) \to \infty$$

ולכן

$$\frac{1}{\sin^2 \pi x + \sinh^2 (N+\frac{1}{2})\pi} \leq \frac{1}{\sinh^2 (N+\frac{1}{2})\pi} \to 0$$

ולכן החל מ N מסוים הביטוי חסום. עבור קווים אנכיים, $x = \pm(N + \frac{1}{2})$ ולכן

$$\sin^2 \pi x = \sin^2(\pm(\pi N + \frac{\pi}{2})) = \sin^2(\pi N + \frac{\pi}{2}) = 1$$

ולכן

$$\frac{1}{\sin^2 \pi x + \sinh^2(N + \frac{1}{2})\pi} \leq \frac{1}{\sin^2 \pi x} = 1$$

כלומר גם כאן חסום ובזה סיימנו.