

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 6: סוגרי פואסון ומערכות ייחוס מסתובבות

1. הוכיחו את התכונות הבאות של סוגרי פואסון

(א) אנטיסימטריות $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ולכן $\{f, f\} = 0$

(ב) $\{f, const\} = 0$

(ג) לינאריות $\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha\{f, g\} + \beta\{f, h\}$

(ד) זהות יעקובי $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

(ה) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$

2. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. נציג

כעת את המשתנים $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$, $a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$

(א) בטאו את \mathcal{H} באמצעות a, a^* .

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a, a^*\}$, $\{a, \mathcal{H}\}$, $\{a^*, \mathcal{H}\}$.

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.

(ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

(ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות 2. ד. השוו לחישוב הישיר.

3. נתונה מטוטלת פוקו המורכבת מחוט חסר מסה באורך ℓ ומסה m בקצהו.

המטוטלת ממוקמת בקו רוחב λ ונוטה בזווית θ . המהירות הזוויתית של

כדור "א" Ω .

(א) רשמו את הלגראנגיאן של המטוטלת

(הדרכה: רשמו את מהירות המטוטלת ביחס למערכת האינרציאלית

כאשר $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ והזניחו איברים $\mathcal{O}(\Omega^2)$. השתמשו

בקירוב תנודות קטנות עבור הפוטנציאל, כך ש $\ell^2 \theta^2 \approx x^2 + y^2$.

(ב) כתבו את משוואות אויילר לגראנג' והשוו למשוואות התנועה שקיבלנו

בכיתה.

(ג) מצאו את התנעים הקנוניים ורשמו את ההמילטוניאן $\mathcal{H}(\Omega)$

(ד) הראו כי

$$(1) \quad \mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}(0) - L\Omega \sin \lambda$$

כאשר L התנע הזויתי. מה המשמעות של $\mathcal{H}(0)$?

(ה) הראו כי התנע הזויתי נשמר

i. ע"י שימוש ב (1)

ii. באמצעות סוגרי פואסון

4. גוף בעל מסה m נזרק אנכית כלפי מעלה במהירות v_0 . הוכיחו כי המקום בו נופל הגוף מוסט מערבה מנקודת הזריקה במרחק Δ השווה ל

$$(2) \quad \Delta = -\frac{4}{3}\Omega \cos \lambda \sqrt{8h^3/g},$$

כאשר Ω המהירות הזויתית של כדור הארץ, h הגובה המקסימלי ו λ קו הרוחב בו נמצא הגוף.