

בוחר אלגברה לינארית 1 – סמסטר קיץ תיכוניסטים תשפ"ו

הצעת פתרון באדיבות עדי מכנס

1. (20 נק' כל סעיף) תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצות.

א. הוכיחו: ל A ול B אותה מטריצה מדורגת קנונית אם ורק אם, קיימת מטריצה הפיכה $E \in \mathbb{F}^{m \times m}$ כך ש $EA = B$.

פתרון:

נוכיח את שני הצדדים.

בכיוון $\Leftarrow$ נניח כי ל A ול B יש אותה מטריצה מדורגת קנונית, אשר נסמנה ב M . לכן קיימות מטריצות פעולה $P_1^A, \dots, P_k^A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ כך ש:

$$(P_1^A \dots P_k^A)A = M$$

ובאופן דומה קיימות מטריצות פעולה $P_1^B, \dots, P_\ell^B \in \mathbb{F}^{m \times m}$ כך ש:

$$(P_1^B \dots P_\ell^B)B = M$$

ולכן:

$$(P_1^A \dots P_k^A)A = (P_1^B \dots P_\ell^B)B$$

כעת נזכור כי מטריצות פעולה הן הפיכות, ולכן נכפול ב $(P_1^B)^{-1}, (P_2^B)^{-1}$ וכו' עד $(P_\ell^B)^{-1}$ מצד שמאל בשני אגפי השוויון ונקבל:

$$(P_\ell^B)^{-1} \dots (P_1^B)^{-1} \cdot P_1^A \dots P_k^A \cdot A = B$$

אם נסמן $E = (P_\ell^B)^{-1} \dots (P_1^B)^{-1} \cdot P_1^A \dots P_k^A$, נקבל מטריצה שהיא מכפלה של מטריצות הפיכות ועל כן גם כן מטריצה הפיכה.

בכיוון $\Rightarrow$ נניח שקיימת מטריצה הפיכה $E \in \mathbb{F}^{m \times n}$ כך ש $EA = B$. נסמן את הצורה המטריצה המדורגת קנונית של A ב M_A ואת המטריצה המדורגת קנונית של B ב M_B . לכן, קיימות P_1, P_2 הפיכות כך ש:

$$P_1 A = M_A$$

$$P_2 B = M_B$$

וכעת:

$$M_B = P_2 B = P_2 EA$$

נתבונן במטריצה $P = P_2 E$. היא מדרגת קנונית את A , ולכן לא ייתכן ש $M_B \neq M_A$, אחרת מצאנו שתי מטריצות מדורגות קנוניות שונות לאותה מטריצה, בסתירה. משל ■.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $AA^t = BB^t$ אז $A = B$.

פתרון:

נפריך את הטענה. נביט במטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קל לראות ש:

$$A = A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן

$$AA^t = BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אבל $A \neq B$.

2. (20 נק' כל סעיף) יהיו $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ במרחב $\mathbb{R}^3$. יהא $w = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ התלוי בפרמטר ממשי a .

א. לאילו ערכי a מתקיים כי $w \in \text{span}\{v_1, v_2\}$?

פתרון:

למעשה אנחנו צריכים למצוא פתרון למערכת המשוואות:

$$xv_1 + yv_2 = w$$

כלומר למצוא x, y המקיימים:

$$\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = w$$

נראה לאלו ערכי a יש פתרונות למערכת.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 2 & a+2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-a \\ 0 & 2 & a+2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a+2 \\ 0 & 0 & a^2-a \end{array} \right)$$

כעת יש פתרון למערכת אם ורק אם $a^2 - a = 0$, כלומר עבור $a = 0$ או $a = 1$ בלבד.

ב. לאילו ערכי a מתקיים כי $W = \{w + sv_1 + tv_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$?

פתרון:

עלינו לבדוק עבור איזה ערך של a הקריטריון המקוצר מתקיים.

נתחיל מכך שנבדוק לאילו ערכי a וקטור האפס שייך ל W . כלומר, עבור אילו סקלרים s, t מתקיים ש:

$$w + sv_1 + tv_2 = 0$$

כלומר

$$w = -sv_1 - tv_2$$

אם נסמן $x = -s, y = -t$ נקבל שלמעשה עלינו למצוא האם קיימים x, y כך ש:

$$w = xv_1 + yv_2$$

אבל הוכחנו בשאלה קודמת שקיימים כנ"ל אם ורק אם $a = 0, 1$.

נמשיך לתנאי השני, בהנחה ש $a = 0, 1$ (אחרת ברור שלא מדובר בתת מרחב).

נזכור שאם $w \in \text{span}\{v_1, v_2\}$ אזי הקבוצה נהיית:

$$W = \{w + sv_1 + tv_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{s'v_1 + t'v_2 \mid s', t' \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{v_1, v_2\}$$

והקבוצה הזו תת מרחב. סה"כ מתקיים ש W תת מרחב אם $a = 0, 1$.

הערה: הסקנו מכאן שבאופן כללי, הקבוצה $\{p + sv \mid s \in \mathbb{F}\}$ היא מרחב וקטורי אם ורק אם $p \in \text{span}\{v\}$.

3. (20 נק' כל סעיף) תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ו $b \in \mathbb{F}^m$ וקטור שונה מאפס. נתבונן במערכת המשוואות $Ax = b$.

א. הוכיחו: כל שתי פתרונות שונים למערכת הם בת"ל.

פתרון:

יהיו $v_1 \neq v_2 \in \mathbb{F}^n$ פתרונות למערכת המשוואות. נניח בשלילה שהם ת"ל. לכן קיים צירוף לינארי מתאפס:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = \vec{0}$$

לכן

$$c_1 v_1 = c_2' v_2$$

כאשר $c_2' = -c_2$. נכפיל ב A את שני הצדדים (מצד שמאל) ונקבל:

$$Ac_1 v_1 = Ac_2' v_2$$

$$c_1 b = c_2' b$$

לכן

$$(c_1 - c_2')b = \vec{0}$$

(שימו לב הכוונה כאן לוקטור האפס). אבל מכיוון ש $b \neq 0$, בהכרח מתקיים כי $c_1 = c_2'$, ולכן:

$$c_1 v_1 = c_2' v_2 = c_1 v_2$$

ולכן מכיוון ש $c_1 \neq 0$ (שהרי אחרת $b = \vec{0}$ בסתירה לנתונים) יש לו הופכי, ונקבל:

$$v_1 = v_2$$

בסתירה. משל ■.

ב. יהיו v_1, v_2 שני [טעות עברית בטופס המקורי] פתרונות שונים למערכת. הוכיחו או הפריכו: $\text{span}\{v_1\} \cap \text{span}\{v_2\} = \{0\}$.

פתרון:

נוכיח את הטענה. נניח בשלילה שקיים $v \in \mathbb{F}^n$ $\vec{0} \neq v$ כך ש $v \in \text{span}\{v_1\} \cap \text{span}\{v_2\}$. לכן, קיימים $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ כך ש:

$$v = c_1 v_1$$

$$v = c_2 v_2$$

ברור כי $c_1, c_2 \neq 0$, אחרת סתירה לכך ש $b \neq \vec{0}$. לכן:

$$c_1 v_1 = c_2 v_2$$

$$c_1 v_1 - c_2 v_2 = \vec{0}$$

אבל זהו צירוף לינארי מתאפס, ומהסעיף הקודם נקבל ש $c_1 = c_2 = 0$, בסתירה. משל ■.