פתרון בוחן מבוגרים

12 במאי 2015

1. נגדיר $t(x) = \|x\|$. שימו לב שלכל $1 \le k \le n$ מתקיים:

$$\frac{\partial t}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\|x\|}$$

לפי הרמז יש להתבונן בפונקציה $f(x) = \int_1^{||x||} s\varphi(s)ds$ כלומר על הפונקציה:

$$h(t) = \int\limits_1^t s\varphi(s)ds$$

כאשר $f(x) = h(t(x))$ ולכן לפי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{dh(\|x\|)}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x_k}(x) = t\varphi(t)|_{t=\|x\|} \cdot \frac{x_k}{\|x\|} = F_k(x)$$

כנדרש.

2. ניתן לחשב את האינטגרל ע"י פרמטריזציה של העקומה; בהצלחה עם זה.

נחשב את האינטגרל בעזרת משפט גרין. דא עקא, שתנאי משפט גרין לא מתקיימים, מכיוון שהמסילה שלנו לא סגורה.

לכן, כדי שנוכל להשתמש במשפט גרין, נסגור את המסילה שלנו, ע"י קטע שנסמנו C_1 מהנקודה $(1,1)$לנקודה $(0,0)$ (זו בעצם התקדמות לאורך $y = x$).

האינטגרל הקווי שלנו יהיה סכום שני האינטגרלים הקוויים, האינטגרל המקורי שלנו והאינטגרל לאורך $y = x$.

כעת, השדה הוקטורי שלנו הוא:

$$(P, Q) = (y + \tan^3 x, 3x + \tan^3 y)$$

ולכן:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-1=2$$

ולפי משפט גרין, נקבל שסכום האינטגרלים שלנו הוא:

$$\int\limits_C+\int\limits_{C_1}=\iint\limits_D 2dxdy$$

כעת, התחום D שלנו הוא התחום הכלוא בין $y=x$ לבין $y=x^3$ בין הנקודות $(0,0)$ו-$(1,1)$.

עם קצת רצון וקצת אינפי 3, נשים לב שבתחום זה $x^3\leq x$ ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$2\iint\limits_D dxdy=2\int\limits_0^1(\int\limits_{x^3}^x dy)dx=2\int\limits_0^1(x-x^3)dx=2(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})|_0^1=\frac{1}{2}$$

כעת, נחשב את האינטגרל $\int_{C_1}$.

פרמטריזציה של הקטע לאורך $y=x$ היא $\gamma(t)=(t,t),t\in[0,1]$, והכיוון הפוך כמובן.

$\gamma'(t)=(1,1)$, ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$-\int\limits_0^1(t+\tan^3 t,3t-\tan^3 t)\cdot(1,1)dt=-\int\limits_0^1 4tdt=-2$$

ואם כן:

$$\int\limits_C+\int\limits_{C_1}=2\iint\limits_D dxdy\Longrightarrow\int\limits_C=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

וזהו האינטגרל שלנו.

3. נשתמש בנוסחה שלנו:

$$\int\limits_C fdS=\int\limits_a^b f(\gamma(t))\left\|\gamma'(t)\right\|dt$$

במקרה שלנו $f(x,y,z)=3x^2yz$, $\gamma(t)=(t,t^2,\frac{2}{3}t^3)$ ולכן:

$$f(\gamma(t))=3t^2\cdot t^2\cdot\frac{2}{3}t^3=2t^7,\gamma'(t)=(1,2t,2t^2),\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+4t^2+4t^4}$$

ואם כן:

$$\int_C 3x^2yzdS = \int_0^1 2t^7\sqrt{1+4t^2+4t^4}dt = \int_0^1 2t^7(1+2t^2)dt = (\frac{t^8}{4}+\frac{4t^{10}}{10})|_0^1 = \frac{13}{20}$$

בונוס:

פרמטריזציה של העקומה שלנו היא:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

ולכן:

$$\int_C \omega d\underline{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t, -\cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -\frac{\pi}{2}$$