תרגיל בית 10 – טופולוגיה 2014

**שאלה 1**

1. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס.
2. הראו שאם  הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב , המכיל בסיס  ל-, אזי  הוא בעצמו בסיס ל-.
3. יהיו  טופולוגיות על . יהי  בסיס ל-. אזי:  אם ורק אם .

**שאלה 2**

1. יהיו  מ"ט. יהיו  סגורות. הוכיחו כי הקבוצה  סגורה ב- .
2. יהיו  מ"ט, . הוכיחו כי  (או בסימון חלופי: ).
3. יהי  מ"ט אינסופי עם הטופולוגיה הקו-סופית. נסמן ב- את טופולוגיית המכפלה על . האם  היא הטופולוגיה הקו-סופית על ? הוכיחו או הפריכו!

**שאלה 3**

1. יהי מ"ט. נגדיר את האלכסון של להיות . הראו שאם  סגור ב- אזי  הוא האוסדורף. (שימו לב שאת הכיוון השני של הטענה הזו הוכחנו בתרגול.)
2. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי  עם קבוצה צפופה  ושתי פונקציות רציפות שונות  המתלכדות על .

**שאלה 4**

יהיו  מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש-.

**שאלה 5**

תהי  קבוצה ונגדיר שני אוספים של תת-קבוצות של : , .

1. הוכיחו כי  הוא בסיס לטופולוגיה כלשהי  על .
2. הוכיחו ש- הוא מרחב טופולוגי האוסדורף.

**שאלה 6**

תהי  רציפה והפיכה. הוכיחו ש-  הומיאומורפיזם.

הדרכה מומלצת:

1. הראו שלכל  קיימים  כך ש-; בנוסף,
2. ( וגם ) או ( וגם )

[כלומר,  (במקרה הזה) מעבירה שפה לשפה.]

1. הסיקו ש- פתוחה ולכן גם הומיאומורפיזם.

**שאלה 7**

1. הוכיחו/הפריכו: לישר של סורגנפריי יש בסיס המורכב מקבוצות סגוחות.
2. הוכיחו ש- מהווה בסיס למרחב המטרי .

**בְּהַצְלָחָה!**