וקטורים – בגישה משולבת
שאלון 035807
חלק א

ד"ר נעמי צ'יזיק

תשע"ז

מפגש 9 נצרת עילית

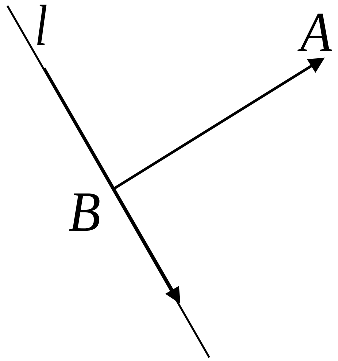
חישובי מרחקים

מרחק נקודה מישר במרחב

במרחב, לישר קיימת הצגה פרמטרית בלבד.

נתונה הנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ וישר $l : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{b}$.

נראה מספר דרכים לחשב את המרחק ביניהם:



דרך א

א. נבחר נקודה B כללית על הישר l.

ב. נביע את הוקטור $\overrightarrow{BA}$.

ג. נדרוש שיתקיים $\overrightarrow{BA} \cdot \underline{b} = 0$.

ד. נמצא את הפרמטר t, המצביע על נקודה B,המקיימת את התנאי שבסעיף ג'.

ה. נחשב את מרחק בין A ל- B.

דרך ב בעזרת אנליזה

מרחק נקודה ממישור

אם המישור נתון **בהצגה תבניתית** $ax+by+cz+k=0$

אזי המרחק:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+k|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

במידה והמישור נתון **בהצגה פרמטרית** אפשר לנהוג באחת משתי דרכים:

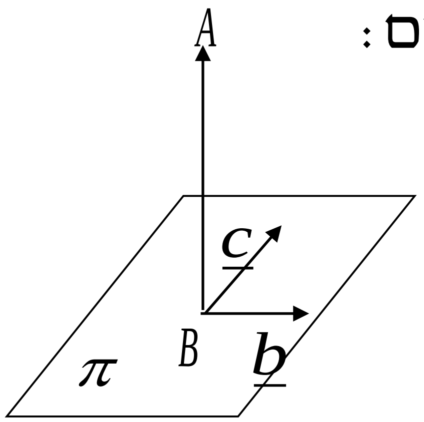
<u>דרך א</u>

לעבור להצגה תבניתית של המישור ולהשתמש בנוסחה הקודמת.

<u>דרך ב</u>

נתונים מישור $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{b} + s\underline{c}$ ונקודה $A(x_1, y_1, z_1)$.

נפעיל שיקולים גיאומטריים ונחשב את המרחק בשלבים :



א. נבחר נקודה B כללית על מישור .

ב. נביע את הוקטור $\overrightarrow{BA}$.

ג. נדרוש שיתקיים $\overrightarrow{BA} \cdot \underline{b} = 0$ ו- $\overrightarrow{BA} \cdot \underline{c} = 0$.

ד. נמצא את הפרמטרים t ו- s, המצביעים על נקודה מסוימת B המקיימת את התנאי שבסעיף ג'.

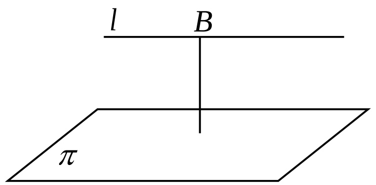
ה. נחשב המרחק בין A ל-B.

<u>שימו לב :</u>

א. כאן יש יותר נעלמים (2) אך גם יותר משוואות (2).

ב. למעשה אנו מוצאים את הוקטור הניצב למישור – פעולה שקולה למעבר להצגה תבניתית.

מסקנות והארות:



לחישוב מרחק של ישר ממישור המקביל לו

נבחר נקודה שרירותית Bעל הישר ונחשב א מרחקה מהמישור כפי שתואר קודם.

לחישוב מרחק בין שני מישורים מקבילים

נבחר נקודה שרירותית על מישור אחד ונחשב את מרחקה מהמישור השני כפי שתואר קודם.

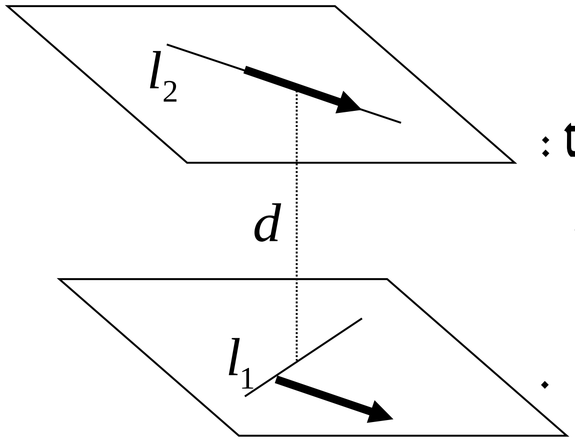
לחישוב מרחק בין שני ישרים מקבילים

נבחר נקודה שרירותית B על אחד הישרים ונחשב את מרחקה מהישר השני .

מרחק בין ישרים מצטלבים

הגדרה : שני ישרים מצטלבים הם ישרים שאינם מקבילים, אך גם אינם נחתכים. (הישרים נמצאים במישורים מקבילים, אך אינם מקבילים).

משפט : אם l_1 ו- l_2 ישרים מצטלבים, אז דרך l_2 עובר מישור אחד ויחיד המקביל ל- l_1 .



כדי למצוא את המרחק בין שני ישרים מצטלבים :

נמצא את המישור π_1 המכיל את l_1 ומקביל ל- l_2

נמצא את מרחקה של נקודה על l_2 מהמישור π_1 .

דוגמה

נתונים הישרים : $l_1 : \underline{x} = (2,1,3) + t(1,2,-1)$ ו- $l_2 : \underline{x} = (3,0,2) + r(-2,1,3)$

א. קבע את המצב ההדדי של שני הישרים.

ב. מצא את המרחק ביניהם.

פתרון :

א. הישרים מצטלבים

ב. נמצא את ההצגה הפרמטרית של המישור π_1 המכיל את l_1 ומקביל ל- l_2 :

$$\pi_1 : \underline{x} = (2,1,3) + t(1,2,-1) + k(-2,1,3)$$

נבחר נקודה כלשהי A על הישר l_2 , למשל (3,0,2). נמצא את מרחקה מהמישור π_1 .

לשם כך נבחר נקודה כללית על המישור π_1 : $B(2+t-2k, 1+2t+k, 3-t+3k)$

נביע את הוקטור $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (t-2k-1, 1+2t+k, 1-t+3k)$

נדרוש תנאי ניצבות עם וקטורי הכיוון של המישור :

$$\overrightarrow{AB} \cdot (1,2,-1) = 0$$

$$t-2k-1+2(1+2t+k)-1(1-t+3k) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 2t$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot (-2,1,3) = 0$$

$$14k - 3k + 6 = 0$$

$$k = -\frac{12}{25} \qquad t = -\frac{6}{25}$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{7}{25}, \frac{1}{25}, -\frac{5}{25}\right)$$

האם מותר כאן לכפול את הוקטור ב-25? מדוע?

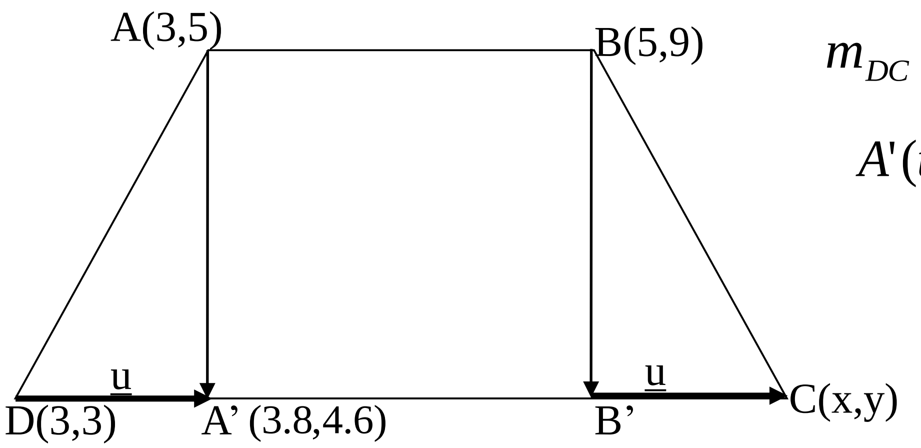
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{1}{25}\right)^2 + \left(-\frac{5}{25}\right)^2} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{3}$$

<u>הערה</u>: אחרי שלב ב' ניתן לעבור מהצגה פרמטרית של מישור למשוואה ולהשתמש בנוסחת המרחק של נקודה ממישור.

בעייה אינטגרטיבית – סרור אסעד, בית ג׳אן .

במישור נתונות הנקודות D(3,3) B(5,9) A(3,5).

א. מצא את הנקודה C כך ש-ABCD יהיה טרפז שווה שוקיים (BC, AD הם שוקי הטרפז).



$$m_{DC} = m_{AB} = 2 \qquad \underline{DC: y = 2x-3}$$

$$A'(t,2t-3) \quad \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AB} \quad (t-3,2t-8)\bullet(2,4)=0$$

$$t = 3.8 \quad \underline{A'(3.8,4.6)}$$

$$\underline{u} = (0.8,1.6) \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = (2,4)$$

$$\overrightarrow{DC} = \underline{u} + \overrightarrow{A'B'} + \underline{u} = (3.6,7.2) = (x-3, y-3)$$

$$\underline{C(6.6,10.2)}$$

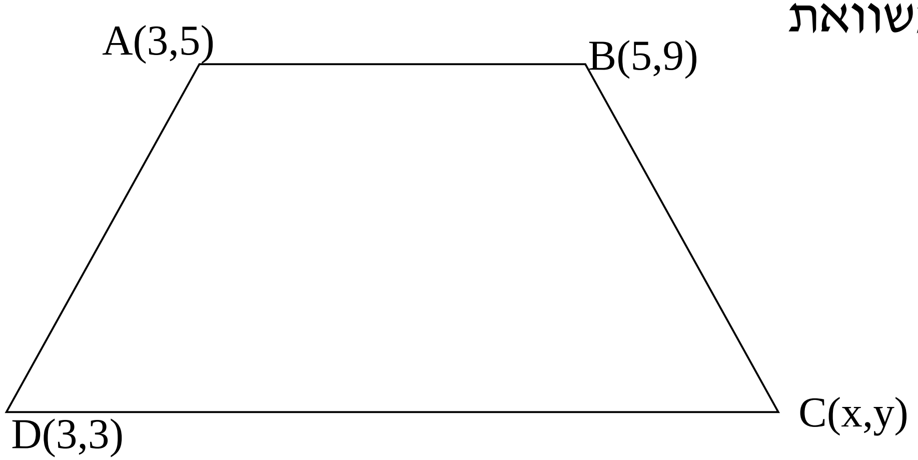
סאמאהר מציעה : להוריד אנך מאמצע AB למציאת אמצע DC ולחשב את ערכי C על פי אמצע קטע.

מרינה גורובוי מציעה : למצוא את ערכי C בעזרת מציאת מרכז המעגל החוסם (סעיף ג).

ב. חשב את שטחו של הטרפז ABCD.

$$S_{ABCD} = \frac{\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{DC}\right|\right)\cdot\left|\overrightarrow{AA'}\right|}{2}$$

ג. מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.



אמצע DA : (3,4) שיפוע אנך אמצעי : 0 משוואת אנך אמצעי : y = 4

אמצע הקטע AB : (4,7) שיפוע האנך האמצעי : 0.5 - משוואתו : y = - 0.5x+9

מפגש האנכים האמצעיים : (10,4)

ד. נתון: הטרפז ABCD הוא בסיס של פירמידה, שקודקודה S נמצא בנקודת החיתוך של המישורים :

$$\pi_1 : 20x - 10y - 13z - 30 = 0$$

$$\pi_2 : 4x - 2y - 3z - 2 = 0$$

$$\pi_3 : 10x - 7z - 30 = 0$$

S(10,4,10)

(1) מצא את שיעורי הקודקוד S.

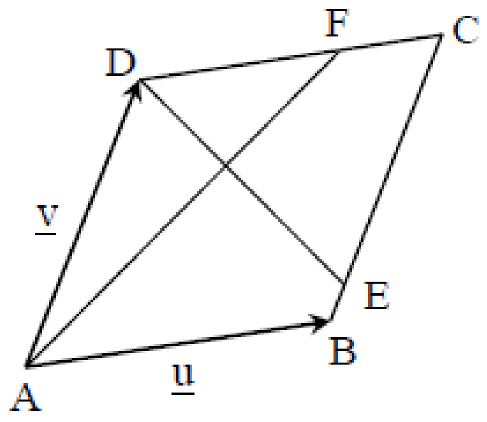
(2) הראה כי היטל הקודקוד על מישור ABCD מתלכד עם מרכז המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

(3) חשב את נפח הפירמידה .

שאלה של סרור אסעד (מתכונת)

3. במעוין ABCD נתון כי הנקודה E נמצאת על הצלע BC כך ש- $CE = 7BE$ והנקודה F נמצאת על הצלע CD כך ש- $CF = \frac{1}{2}DF$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$.



א. הבע את $\overrightarrow{AF}$ ו- $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. נתון: $AF \perp DE$. חשב את הזווית $\sphericalangle BAD$.

ג. הצלעות AB ו- AD מונחות בהתאמה על הישרים:

$\ell_1 : \underline{x} = (1,1,-5) + t(m,1,1)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,-4) + r(1,-1,2)$.

(1) חשב את m.

(2) מצא את שיעורי הקדקוד A.

(3) נתון כי גובה המעוין שווה ל- $3\sqrt{2}$. מצא את שיעורי הקדקוד D.

(4) חשב את שטח המעוין ABCD.

3. א. $\overline{AF} = \frac{2}{3}\underline{u} + \underline{v}$, $\overline{DE} = \underline{u} - \frac{7}{8}\underline{v}$.

ב. $\sphericalangle BAD = 60°$.

ג. (1) $m = 2$.

(2) $A(7,4,-2)$.

(3) $D(9,2,2)$ או $D(5,6,-6)$.

(4) $12\sqrt{3}$.