פתרון תרגיל 7

1. נניח ש־$f = u + iv$ היא פונקציה שלמה, הוכיחו ש־f קבועה בכל אחד מהמקרים הבאים

א. $u(z) \geq 0$ ב. $u(z) \geq v(z)$ ג. $u(z) \cdot v(z) \geq 0$

כאשר כל אחד מאי־השוויונים מתקיים לכל $z \in \mathbb{C}$.

פתרון: א. נניח ש־$u(z) \geq 0$ לכל z מרוכב. נגדיר את הפונקציה $g(z) = e^{-f(z)}$, אז

$$|g(z)| = \left|e^{-f(z)}\right| = \left|e^{-u(z)-iv(z)}\right| = e^{-u(z)} \leq 1.$$

כיוון ש־g היא פונקציה שלמה (כהרכבה של פונקציות שלמות) וכיוון שהיא גם חסומה, נובע ממשפט ליוביל שהיא קבועה. לכן

$$0 = g'(z) = -e^{-f(z)} f'(z).$$

כיוון ש־$e^{-f(z)} \neq 0$ נובע ש־$f'(z) = 0$ ולכן f קבועה.

ב. נגדיר את הפונקציה $g(z) = (1+i)f(z)$, אז

$$g(z) = (1+i)(u(z) + iv(z)) = u(z) - v(z) + i(u(z) + v(z)).$$

מהנתון ש־$u(z) \geq v(z)$ נובע שהחלק הממשי של g גדול או שווה לאפס לכל z מרוכב ולכן מסעיף א' נובע ש־g קבועה. לכן נקבל שגם f קבועה.

ג. נגדיר את הפונקציה $g(z) = -i \cdot f^2(z)$, אז

$$g(z) = -i \cdot (u(z) + iv(z))^2 = 2u(z)v(z) - i(u^2(z) - v^2(z)).$$

מהנתון ש־$u(z) \cdot v(z) \geq 0$ נובע שהחלק הממשי של g גדול או שווה לאפס ולכן שוב מסעיף א' נובע ש־g קבועה. לכן נקבל שגם f קבועה.

2. תהי f פונקציה שלמה המקיימת

$$\limsup_{|z| \to \infty} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$$

הוכיחו שבהכרח f היא פונקציה לינארית מהצורה $az + b$ כאשר $a, b \in \mathbb{C}$.

<u>פתרון</u>: קודם נוכיח שלכל z_0 מרוכב מתקיים

$$\limsup_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|\leq 1$$

אכן, כיוון ש־

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{z}{z-z_0}\right|=\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{1}{1-\frac{z_0}{z}}\right|=\left|\frac{1}{1+0}\right|=1,$$

נקבל

$$\limsup_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|=\limsup_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\left|\frac{z}{z-z_0}\right|$$

$$\leq\limsup_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\limsup_{|z|\to\infty}\left|\frac{z}{z-z_0}\right|=\limsup_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leq 1.$$

כמו כן, ממשפט קושי לנגזרות

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$$

כאשר $r>0$ מספר ממשי כלשהו. לכן

$$|f'(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=r}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right||dz|=\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-z_0|=r}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)}\right||dz|$$

$$\leq\frac{2\pi r}{2\pi r}\cdot\max_{|z-z_0|=r}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|$$

אם $r=|z-z_0|$ ו־ $r\to\infty$ אז $|z|\to\infty$. לכן נקבל שעבור r מספיק גדול

$$\max_{|z-z_0|=r}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|\leq 1.$$

לכן קיבלנו ש־$|f'(z_0)|\leq 1$ לכל z_0 מרוכב, כלומר f' היא פונקציה חסומה וממשפט ליוביל נקבל שהיא קבועה. מכאו נובע ש־f היא פונקציה לינארית $az+b$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$.

3. מצאו את כל הפונקציות השלמות f המקיימות את אי השוויון

$$|f(x+iy)| \leq e^x,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

<u>פתרון:</u> כיוון ש־

$$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = e^x$$

נובע מהנתון ש־

$$|f(z)| \leq |e^z|\,.$$

נגדיר את הפונקציה $g(z) = e^{-z}f(z)$, אז g פונקציה שלמה כמנה של פונקציות שלמות וגם המכנה לא מתאפס (הפונקציה האקספוננציאלית לא מתאפסת באף נקודה). כמו כן

$$|g(z)| = \left|e^{-z}f(z)\right| = \left|\frac{f(z)}{e^z}\right| \leq 1.$$

לכן g פונקציה חסומה וממשפט ליוביל נקבל שהיא שווה לקבוע $c \in \mathbb{C}$. לכן קיבלנו ש־$f(z) = ce^z$ ו־ $|c| \leq 1$ כי $|g| \leq 1$.

4. פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור סביב הנקודות z הנתונות

א. $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2},\ z = 0, 2$.

ב. $f(z) = \cos\left(\pi(z^2+2z)\right),\ z = -1$.

ג. $f(z) = e^z \sin(z),\ z = 0, 1$.

<u>פתרון:</u> א. נרשום את f בצורה

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z-1+1}{(1-z)^2} = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1-z)^2}.$$

כדי לפתח את f לטור סביב $z = 0$ נשתמש בנוסחא לסדרה הנדסית אינסופית $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ואם נגזור נוסחא זו נקבל $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$. לכן אם נציב נוסחאות אלו בצורה שרשמנו ל־f נקבל

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}, |z| \leq 1.$$

רדיוס ההתכנסות של טור זה הוא $r = 1$ כי זהו המרחק של $z = 0$ מנקודת הסינגולריות $z = 1$. כעשיו נפתח את f לטור סביב $z = 2$. מנוסחא לסדרה הנדסית נקבל

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{1-(2-z)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(2-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n.$$

אם נגזור נוסחא זו נקבל

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-2)^{n-1}.$$

נציב נוסחאות אלו בנוסחא שרשמנו ל־f ונקבל

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-2)^{n-1},\ |z-2| \leq 1.$$

רדיוס ההתכנסות של טור זה הוא $r = 1$ כי זהו המרחק של $z = 2$ מנקודת הסינגולריות $z = 1$.

ב. נרשום את f בצורה

$$f(z) = \cos\left(\pi(z^2+2z)\right) = \cos\left(\pi(z^2+2z+1-1)\right)$$

$$= \cos\left(\pi(z^2+2z+1)-\pi\right) = -\cos\left(\pi(z^2+2z+1)\right)$$

$$-\cos\left(\pi(z+1)^2\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}(z+1)^{4n}}{(2n)!}$$

ג. נרשום את f בצורה

$$f(z) = e^z\sin(z) = \frac{e^z}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right)$$

לכן הפיתוח של f סביב הנקודה $z = 0$ יהיה

$$\frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^nz^n}{n!} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^nz^n}{n!},$$

והפיתוח של f סביב הנקודה $z = 1$ יהיה

$$\frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{1+i}e^{(1+i)(z-1)}-e^{1-i}e^{(1-i)(z-1)}\right)$$

$$= \frac{e^{1+i}}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n(z-1)^n}{n!} - \frac{e^{1-i}}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n(z-1)^n}{n!}$$

5. מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של הפונקציות הבאות סביב הנקודות הנתונות

א. $f(z)=\dfrac{1}{1+z+z^2},\ z=i$

ב. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}+\dfrac{1}{e^{iz}+1},\ z=1,3i\pi$

<u>פתרון:</u> א. ל־f יש נקודות סינגולריות ב־$z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. מבין נקודות אלו, הנקודה $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ היא הקרובה ביותר ל־$z=i$ והמרחק בין נקודות אלו הוא

$$\left|i-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

ולכן זה יהיה רדיוס ההתכנסות.

ב. ל־f יש נקודות סינגולריות כאשר $e^z=1$ או $e^{iz}=-1$. כלומר ל־f יש נקודות סינגולריות בקבוצה

$$\{2\pi ik:k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(2k+1)\pi:k\in\mathbb{Z}\}.$$

הנקודה הסינגולרית הכי קרובה ל־$z=1$ היא $z=0$ והמרחק בין נקודות אלו הוא 1. לכן רדיוס ההתכנסות של טור טיילור סביב $z=1$ הוא $r=1$. הנקודה הסינגולרית הכי קרובה ל־$z=3i\pi$ היא $z=2i\pi$ והמרחק בין נקודות אלו הוא π. לכן רדיוס ההתכנסות של טור טיילור סביב $z=3i\pi$ הוא $r=\pi$.

6. מצאו טור טיילור סביב $z=-1$ לאותו ענף של $\sqrt{z}$ שמקיים $\sqrt{-1}=i$.

<u>פתרון:</u> נשתמש בנוסחא

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(z+1)^n$$

לפיתוח של טור טיילור של פונקציה סביב $z=-1$. אם $f(z)=\sqrt{z}$ אז מהנוסחא לחזקות של מספרים מרוכבים נובע ש־$f(z)=e^{\frac{1}{2}\ln(z)}$. כיוון ש־$\ln'(z)=\frac{1}{z}$ נקבל

$$f'(z)=e^{\frac{1}{2}\ln(z)}\left(\frac{1}{2}\ln(z)\right)'=e^{\frac{1}{2}\ln(z)}\frac{1}{2z}=\frac{f(z)}{2z}$$

ובאינדוקציה אפשר להוכיח ש־

$$f^{(n)}(z)=\frac{(-1)^{n+1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!z^n}f(z), n\geq 1$$

מהנתון נובע גם ש־$f(-1)=i$. לכן

$$f^{(n)}(-1)=\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n i(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}=-\frac{i(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}, n\geq 1$$

לכן הפיתוח לטור טיילור סביב $z=-1$ יהיה

$$f(z)=i-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}(z+1)^n.$$