



## אינטגרלים במישור ובמרחב

### אינטגרלים כפולים

יהי תחום  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ותהי  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על  $D$  כרצפה, ועל  $f$  כגובה התקרה, והאינטגרל  $\iint_D f dx dy$  מייצג את נפח הבית.

כמו כן, אפשר לחשוב על  $D$  כמשטח, ועל  $f$  כצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של המשטח.

בנוסף,  $\iint_D 1 dx dy$  הוא השטח של התחום  $D$ .

### חישוב אינטגרלים כפולים

אם

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

אזי

$$\iint_D f dx dy = \int_a^b \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

### שינוי קואורדינטות על אינטגרלים כפולים

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y) \in D \quad (u, v) \in D'$$

אזי

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| du dv$$

### קואורדינטות קוטביות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$(x, y) \in D \quad (r, \theta) \in D'$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

### אינטגרלים משולשים

יהי תחום  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  ותהי  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על  $V$  כאובייקט תלת מימדי, ועל  $f$  כצפיפות בכל נקודה, והאינטגרל  $\iiint_V f dx dy dz$  מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף,  $\iiint_V 1 dx dy dz$  הוא הנפח של התחום  $V$ .

אם

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

וכן

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

אזי

$$\iiint_V f dx dy dz = \iint_D \left( \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

שינוי קואורדינטות

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y, z) \in V \quad (u, v, w) \in V'$$

אזי

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

קואורדינטות גליליות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, z) \in V'$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \cdot r dr d\theta dz$$

קואורדינטות כדוריות

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, \phi) \in V'$$

$$\iiint_V f dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

### אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

תהי מסילה  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  ותהי  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על  $C$  בתור שפה על הרצפה, ועל  $f$  כגובה הקירות, ואז האינטגרל  $\int_C f dr$  מייצג את שטח הקירות. כמו כן, אפשר לחשוב על  $C$  בתור חבל על הרצפה, ועל  $f$  כצפיפות החבל בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של החבל. בנוסף,  $\int_C 1 dr$  הוא אורך המסילה.

### חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה  $C$

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

### אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במרחב

תהי מסילה  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  ותהי  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על  $C$  בתור חבל במרחב ועל  $f$  בתור הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל  $\int_C f dr$  מייצג את המסה של החבל. בנוסף, האינטגרל  $\int_C 1 dr$  הוא האורך של המסילה.

### חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במרחב

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

### אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי מסילה  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  ויהי שדה וקטורי  $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

אפשר לחשוב על  $C$  בתור מסלול על הרצפה, ועל  $\vec{F}$  בתור שקול הכוחות בכל נקודה, ואז  $\int_C \vec{F} d\vec{r}$  מייצג את העבודה שנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

תהי פרמטריזציה של  $C$

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי מסילה  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  ויהי שדה וקטורי  $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

אפשר לחשוב על  $C$  בתור מסלול במרחב, ועל  $\vec{F}$  בתור שקול הכוחות בכל נקודה, אז האינטגרל  $\int_C \vec{F} d\vec{r}$  מייצג את העבודה הנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי פרמטריזציה של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

סימון נוסף לאינטגרלים קוויים מסוג שני

$$\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$$

והפרמטריזציה של המסילה היא

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

אזי נסמן

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$$

כאשר

$$\int_C P dx = \int_a^b P(\vec{r}(t)) \cdot x'(t) dt$$

$$\int_C Q dy = \int_a^b Q(\vec{r}(t)) \cdot y'(t) dt$$

יהי תחום  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  בעל השפה  $C$  ויהי שדה וקטורי  $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  בעל נגזרות רציפות  
אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של  $\vec{F}$  מסביב  $C$  נגד כיוון השעון שווה לאינטגרל הכפול של  $\text{curl}(\vec{F})$  על התחום  $D$ .

נסמן

$$\vec{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

אזי

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{curl}(\vec{F}) dx dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

יהי משטח  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  ותהי  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
אפשר לחשוב על  $M$  כאובייקט משטחי ועל  $f$  כפונקציית הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל  $\iint_M f dS$  מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף,  $\iint_M 1 dS$  מייצג את שטח הפנים של המשטח.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M f dS = \iint_D f(\vec{s}(u, v)) \cdot |\vec{s}_u \times \vec{s}_v| dudv$$

אינטגרלים משטחיים מסוג שני

יהי משטח  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  ויהי שדה וקטורי  $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ויהי כיוון לנורמל למשטח.  
אפשר לחשוב על המשטח בתור ממברנה ועל השדה הוקטורי בתור עוצמת הזרימה, אז האינטגרל  $\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$  הוא סך כל הזרימה דרך הממברנה בכיוון הנורמל הנתון.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}(\vec{s}(u, v)) \cdot (\vec{s}_u \times \vec{s}_v) dudv$$

כאשר הסימן נקבע על ידי בחירת וקטור הנורמל  $\vec{s}_u \times \vec{s}_v$  בכיוון הנתון.

## משפט גאוס (דיברגנץ)

יהי גוף תלת מימדי  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  בעל משטח מעטפת  $M$  ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות  $\vec{F}$ , ונביט בנורמל כלפי חוץ הגוף, אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz$$

## משפט סטוקס

יהי משטח  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  בעל שפה  $C$  ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות  $\vec{F}$ , אזי האינטגרל הקווי נגד כיוון השעון כאשר הלמעלה הוא לפי הנורמל למשטח מקיים:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$